

*Termodinamika*  
**I. Fizika BSC, 2010-2011 II. félév, 3-4. csoport**  
**Zárthelyi dolgozat 3. megoldásai.**

I.) Két különböző minőségű, kétatomos (pl.  $O_2$  és  $N_2$ ) ideális gáz található két szomszédos izolált edényben. Az egyiknek a nyomása  $p_1(=p)$ , a térfogata  $V_1(=V)$ , a hőmérséklete  $T_1(=T)$ , móltömege  $M_1(=32\text{g/mol})$ , a másiknak nyomása  $p_2(=2p)$ , a térfogata  $V_2(=2V)$ , a hőmérséklete  $T_2(=4T)$ , móltömege  $M_2(=28\text{g/mol})$ .

<table style="margin: auto; border: 1px solid black;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 50%;"><math>O_2</math></td> <td style="text-align: center; width: 50%;"><math>N_2</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>V_1,</math> <math>p_1, T_1</math></td> <td style="text-align: center;"><math>V_2,</math> <math>p_2, T_2</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;"><math>T_k = ?; \Delta S = ?</math></td> </tr> </table>	$O_2$	$N_2$	$V_1,$ $p_1, T_1$	$V_2,$ $p_2, T_2$	$T_k = ?; \Delta S = ?$		<p>a) Mekkora lesz a közös hőmérséklet (<math>T_k=?</math>), ha megszüntetjük az edények között a falat és nem engedünk a környezettel hőcserét? <b>15 pont</b></p> <p>b) Mekkora lesz az entrópia megváltozása a keveredés következtében (<math>\Delta S=?</math>)? <b>15 pont</b></p>
$O_2$	$N_2$						
$V_1,$ $p_1, T_1$	$V_2,$ $p_2, T_2$						
$T_k = ?; \Delta S = ?$							

**Megoldás:**

Kétatomos ideális gázra gázra:  $U_1 = n_1 C_{V1} T_1; U_2 = n_2 C_{V2} T_2$  ( $C_{V1} = C_{V2} = 5/2R$ )

a)  $V = V_1 + V_2; U = U_1 + U_2; n = n_1 + n_2;$

A kezdeti adatokkal:  $V = V_1 + V_2 = 4V;$

(az U szupepozíciója helyett):  $nT = n_1 T_1 + n_2 T_2;$

v. másként:  $pV = p_1 V_1 + p_2 V_2$

$$n = n_1 + n_2 = \frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} = n_1 + n_1 = 2n_1$$

tehát  $T_k = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 T + n_1 4T}{2n_1} = \frac{5}{2} T$

**15 pont**

b)  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 \left( C_v \ln \frac{T_k}{T_1} + R \ln \frac{V_k}{V_1} \right) + n_2 \left( C_v \ln \frac{T_k}{T_2} + R \ln \frac{V_k}{V_2} \right)$

$$\Delta S = \frac{pV}{RT} \left[ \left( C_v \ln \frac{2.5T}{T} + R \ln \frac{3V}{V} \right) + \left( C_v \ln \frac{2.5T}{4T} + R \ln \frac{3V}{2V} \right) \right]$$

$$\Delta S = \left( \frac{pV}{RT} \right) \left\{ \left( C_v \ln \frac{5}{2} + R \ln 3 \right) + \left( C_v \ln \frac{5}{8} + R \ln \frac{3}{2} \right) \right\} \quad C_v^{2atomos} = \frac{5}{2} R;$$

$$\Delta S = \left( \frac{pV}{T} \right) \left\{ \left( \frac{5}{2} \ln \frac{5}{2} + \ln 3 \right) + \left( \frac{5}{2} \ln \frac{5}{8} + \ln \frac{3}{2} \right) \right\}$$

**15 pont**

2.) **6g normál** állapotú héliumot adott térfogatra adiabatikusan összenyomunk. A gáz nyomása eközben **100%**-al megnőtt.

a/ Mennyivel nőtt a gáz hőmérséklete? **10 pont**

b/ Mennyi munkát végeztünk a gázon összenyomás közben? **10 pont**

c/ Mekkora az adiabatikus kompresszibilitás a folyamat végén ( $\kappa_s = ?$ )? **15 pont**

(A He nemes gáz ( $f=3$ ), móltömege: **4g**)

**Megoldás:**

a)  $n_{He} = \frac{m_{He}}{M_{He}} = \frac{6\text{g}}{4\text{g}} = 1.5; V_{He} = n_{He} V_o = 1.5 * 22.41\text{l} = 33.6\text{l}$

$$p_o = 10^5 \text{ Pa}; T_o = 273^\circ \text{ K}$$

$$pV^\gamma = \text{áll.}; \text{ vagy } TV^{\gamma-1} = \text{áll.}; \text{ vagy } pV^\gamma = p \left( \frac{nRT}{p} \right)^\gamma = \frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} \text{ áll.} = \text{Áll.}$$

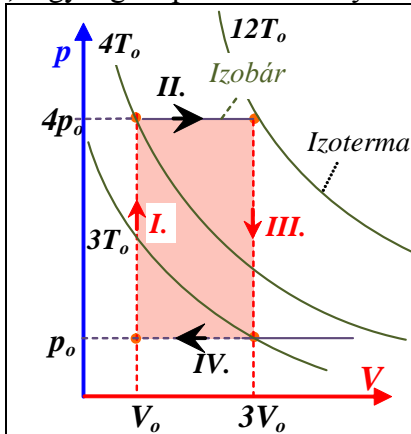
$$\frac{T'^\gamma}{T^\gamma} = \frac{p'^{\gamma-1}}{p^{\gamma-1}}; \text{ vagy } \frac{T'}{T} = \left( \frac{p'}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \text{ ahol } \gamma=5/3, \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2/3}{5/3} = \frac{2}{5}, \text{ tehát}$$

$$\frac{T'}{T_o} = \left( \frac{2p_o}{p_o} \right)^{2/5} = \sqrt[5]{4} = 1.32; T' - T_o = (\sqrt[5]{4} - 1)T_o = 0.32 * 273^\circ K = 58^\circ K \quad \mathbf{10 \text{ pont}}$$

$$b) W = \Delta U = nC_v \Delta T = \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{3}{2} R \right) (\Delta T) = \left( \frac{9}{4} R \right) (\sqrt[5]{4} - 1) T_o \quad \mathbf{10 \text{ pont}}$$

$$c) \kappa_s = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\gamma p} = \frac{1}{5/3 * 2p_o} = 0.3 * 10^{-5} Pa^{-1} \quad \mathbf{15 \text{ pont}}$$

3.) Egy téglalap alakú körfolyamat két izochorból (I.-III.) és két izobárból (II.-IV.) áll.



Az izochorokon a térfogat  $V_o$  és  $3V_o$ , az izobárok a nyomás  $p_o$  és  $4p_o$ . A kezdő hőmérséklet  $T_o$ .

a) Határozd meg a körfolyamat hatásfokát ( $\eta = ?$ ) kizárólag a hőtartályok hőmérsékleteivel kifejezve!  $\mathbf{20 \text{ pont}}$

b) Mekkora ez a hatásfok a megfelelő Carnot hatásfokhoz viszonyítva: ( $\eta / \eta^C = ?$ )  $\mathbf{10 \text{ pont}}$

c) Mekkora a legnagyobb és a legalacsonyabb entrópiájú állapot közötti entrópiakülönbség ( $\Delta S = S_{max} - S_{min} = ?$ )?  $\mathbf{10 \text{ pont}}$

$$(\Delta S = S_{max} - S_{min} = ?)$$

(A gáz molekuláris /kétatomos/:  $f=5$ )

**Megoldás:**

$$a) \eta_{\text{körf}} = \frac{W_{\text{körf}}}{Q_{\text{fel}}} = \frac{Q_{\text{fel}} - Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}}$$

$$W_{\text{körf}} = W_{\text{téglalap}} = (4p_o - p_o)(3V_o - V_o); W_{\text{körf}} = 6p_o V_o = 6nRT_o$$

$$Q_{\text{fel}} = Q_I + Q_{II};$$

$$Q_{\text{fel}} = (\Delta U_I) + (\Delta U_{II} + W_{II}) = nC_v \Delta T_I + nC_p \Delta T_{II}.$$

$$Q_{\text{fel}} = n(C_v(4T_o - T_o)) + (C_p(12T_o - 4T_o))$$

$$Q_{\text{fel}} = n(C_v 3T_o) + (C_p 8T_o) = \frac{71}{2} nRT_o; C_v^{2\text{atomos}} = \frac{5}{2} R; C_p^{2\text{atomos}} = \frac{7}{2} R;$$

$$\eta_{\text{téglalap}} = \frac{12}{71} \quad \mathbf{20 \text{ pont}}$$

$$b) \eta^{\text{Carnot}} = \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} = \frac{\Delta T}{T_{\text{max}}} = \frac{12T_o - T_o}{12T_o} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{\eta_{\text{téglalap}}}{\eta^{\text{Carnot}}} = \frac{12/71}{11/12} = \frac{144}{781} \quad \mathbf{10 \text{ pont}}$$

$$c) \Delta S = S_{\max} - S_{\min} = n(C_V \ln\left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}}\right) + R \ln\left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}}\right))$$

$$\Delta S = n \left[ C_V \ln\left(\frac{12T_o}{T_o}\right) + R \ln\left(\frac{3V_o}{V_o}\right) \right]$$

$$\Delta S = n \left[ \left(\frac{5}{2}\right) R \ln 12 + R \ln 3 \right] = \frac{p_o V_o}{T_o} \left[ \left(\frac{5}{2}\right) \ln 12 + \ln 3 \right]$$

**10 pont**

- Anyagállandók:  $C_v = f/2 R$ ,  $C_p = (f+2)/2 R$ ,  $\kappa_s = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_s$

-  $S^{id.gáz}(T, V) = n (C_V \ln T + R \ln V + s_o)$ ;

- Az általános gázállandó:  $R = 8.31 \text{ J/(mol K)}$ , a normál állapotú gáz móltérfogata: **22.41 l**

Maximális pontszám: 105 pont

Megjegyzés: Részpontok is szerezhetők (a jó megoldáshoz vezető) részeredményekért.

**-Ponthatárok: 2: 40 pont-; 3: 55 pont-; 4: 70 pont-; 5: 85 pont**

**Budapest, 2011. Május 26.**

**dr. Kojnok József**