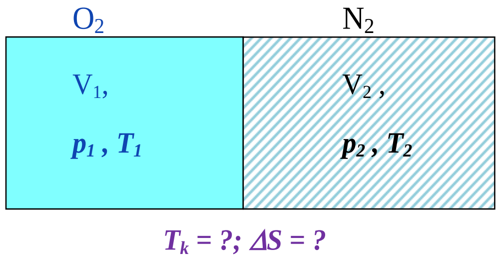
Termodinamika

I.Fizika BSC, 2-4. csoport ;

2011-2012 II. félév

Zárthelyi dolgozat II.

1.) Két különböző minőségű, kétatomos (pl. O_2 és N_2) ideális gáz található két szomszédos izolált edényben. Az egyiknek a nyomása p_1(=$\boldsymbol{p}$), a térfogata V_1(=$\boldsymbol{V}$), a hőmérséklete T_1(=$\boldsymbol{T}$), móltömege M_1(=32g/mol), a másiknak nyomása p_2(=$\boldsymbol{3p}$), a térfogata V_2(=$\boldsymbol{V}$), a hőmérséklete T_2(=$\boldsymbol{2T}$), móltömege M_2 (=28 g/mol).



a) Mekkora lesz a közös hőmérséklet ***(T_k=?),*** ha megszüntetjük az edények között a falat és nem engedünk a környezettel hőcserét? **15 pont**

b) Mekkora lesz az entrópia megváltozása a keveredés következtében ***(ΔS=?)***? **20 pont**

Megoldás:

Kétatomos ideális gázra gázra: $\boldsymbol{U_1 = n_1 C_{V1} T_1;\ U_2 = n_2 C_{V2} T_2}$ ($\boldsymbol{C_{V1} = C_{V2} = 5/2R}$)

a) $\boldsymbol{V = V_1 + V_2\ ;\ U = U_1 + U_2\ ;\ n = n_1 + n_2\ ;}$

A kezdeti adatokkal: $V = V_1 + V_2 = 2V$;

(az U szupepozíciója helyett): $nT = n_1T_1 + n_2T_2$;

$$n = n_1 + n_2 = \frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2} = n + \frac{3}{2}n = \frac{5}{2}n$$

tehát $$T_k = \frac{n_1T_1 + n_2T_2}{n_1 + n_2} = \frac{nT + 3nT}{\frac{5}{2}n} = \frac{8}{5}T = 1.6T$$ ***15 pont***

b) $$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1\left(C_V\, \boldsymbol{ln}\frac{T_k}{T_1} + R\,\boldsymbol{ln}\frac{V_k}{V_1}\right) + n_2\left(C_V\, \boldsymbol{ln}\frac{T_k}{T_2} + R\,\boldsymbol{ln}\frac{V_k}{V_2}\right)$$

$$\Delta S = \frac{pV}{RT}\left[\left(C_V \ln\frac{1.6T}{T} + R\ln\frac{2V}{V}\right) + \frac{3}{2}\left(C_V \ln\frac{1.6T}{2T} + R\ln\frac{2V}{V}\right)\right]$$

$$\Delta S = \frac{pV}{RT}\left[\left(C_V \ln 1.6 + R\ln 2\right) + \frac{3}{2}\left(C_V \ln 0.8 + R\ln 2\right)\right] \qquad C_V^{2atomos} = \frac{5}{2}R;$$

$$\Delta S = \left(\frac{pV}{T}\right)\left\{\left(\frac{5}{2}\ln 1.6 + \frac{5}{2}\ln 2\right) + \left(\frac{15}{4}\ln 0.8\right)\right\}$$ ***20 pont***

2.) Fejezd ki az ideális gáz adiabatikus hőtágulási együtthatóját $\alpha_S = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = ?$ az ***ismert*** anyagállandók és az állapotjelzők és segítségével!

1.Megoldás:

- $S^{id.gáz} = n(s_o + C_V \ln T + R\ln V)$ deriválva $dS^{id.gáz} = n(s_o + C_V \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V})$

Adiabatán $dS^{id.gáz} = 0 = +C_V \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V}$, azaz $C_V \frac{dT}{T} = -R\frac{dV}{V}$, tehát

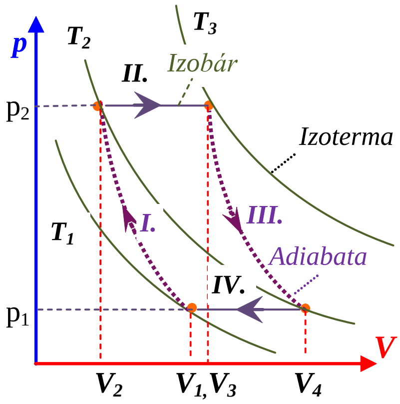
$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = -\frac{C_V}{R}\frac{1}{T}$$ ***30 pont***

2.Megoldás:

Adiabatán: $TV^{\gamma-1} = \text{állandó}$, deriválva $dT\,V^{\gamma-1} + T(\gamma-1)V^{\gamma-2}dV = 0$, tehát

$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = -\frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{T} = -\frac{C_V}{R}\frac{1}{T}$, hiszen $\gamma - 1 = \frac{C_p}{C_V} - 1$ és $C_p - C_V = R$

3.) Egy körfolyamat két adiabatából (I.-III.), és két izobárból (II.-IV.) áll. Az izobárok $\boldsymbol{p_1}$ és $\boldsymbol{p_2}$ nyomásúak. Az ideális gázzal elvégzett folyamat kezdő pontja $\boldsymbol{T_1}$ hőmérsékletű, nyomása $\boldsymbol{p_1}$. A második és a negyedik pont **ugyanazon** az izotermán van, amely $\boldsymbol{T_2}$ *(ismeretlen)* hőmérsékletű, a nyomások rendre $\boldsymbol{p_2}$ és $\boldsymbol{p_1}$. A legmelegebb a 3. pont, melynek hőmérséklete $\boldsymbol{T_3}$, nyomása $\boldsymbol{p_2}$.



a) Mekkora a $\boldsymbol{T_2}$ közbenső hőmérséklet értéke (a $\boldsymbol{T_1}$ és $\boldsymbol{T_3}$ kifejezve)? **10 pont**

b) Határozd meg a körfolyamat hatásfokát ($\boldsymbol{\eta} =?$) kizárólag a a $\boldsymbol{T_1}$ és $\boldsymbol{T_3}$ hőtartályok hőmérsékleteivel kifejezve! **15 pont**

c) Konrétan igazold, hogy ez a hatásfok biztosan kisebb, mint a megfelelő Carnot hatásfok! ($\boldsymbol{\eta < \eta^C}$) **15 pont**

Megoldás:

a) Az adiabatákon a hőmérséklet és a nyomás közötti kapcsolat

$$pV^\gamma = p\left(\frac{nRT}{p}\right)^\gamma = \text{állandó} \text{ : azaz } p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{állandó}$$

I. Adiabata (1.→2. pont) $\quad p_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma}T_2^\gamma$

III. Adiabata (3.→4. pont) $\quad p_2^{1-\gamma}T_3^\gamma = p_1^{1-\gamma}T_2^\gamma$, azaz a kettő egyenletet összeszorozva:

$(p_1p_2)^{1-\gamma}(T_1T_3)^\gamma = (p_1p_2)^{1-\gamma}(T_2T_2)^\gamma$, tehát $\boxed{T_1T_3 = T_2^{\,2}}$ (5premium pont) ***15 pont***

b) $\eta_{körf} = W_{körf}/Q_{fel} = \left(Q_{fel} - Q_{le}\right)/Q_{fel}$

$Q_{fel} = nC_p\Delta T_{II.} = nC_p(T_3 - T_2)$; továbbá $Q_{le} = nC_p|\Delta T_{IV.}| = nC_p(T_2 - T_1)$.

$$\eta_{körf} = 1 - Q_{le}/Q_{fel} = 1 - \frac{nC_p(T_2 - T_1)}{nC_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{(T_2 - T_1)}{(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{(\sqrt{T_1T_3} - T_1)}{(T_3 - \sqrt{T_1T_3})} = 1 - \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_3}}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}}$$ ***15 pont***

c) $\eta^{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$, jelöljük $x = \frac{T_3}{T_1}$ -el a legmagasabb és a legalacsonyabb hőmérséklet arányát.

Ha $x > 1$, akkor $x > \sqrt{x}$, tehát $\eta^C = 1 - \frac{1}{x} > 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \eta$ mindig! ***15 pont***

Maximális pontszám: ***110 pont***

(Megjegyzés: 10 ponttal csökkentek az eredeti ponthatárok és 5 ponttal nőtt a maximum 110 pontra!)

Új ponthatárok: **2:** ***35*** pont-; **3:** ***50*** pont-; **4:** ***65*** pont-; **5:** ***80*** pont

Budapest, 2012. Május 7.

dr. Kojnok József