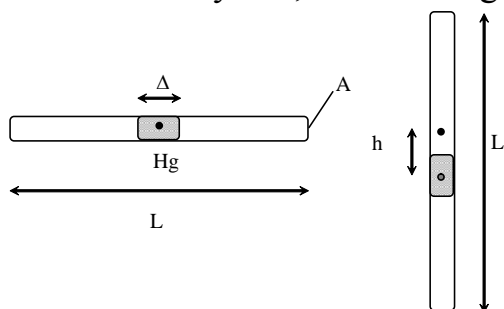


Termodinamika
I. Fizika BSC 2009-2010 II. félév
1. Zárthelyi dolgozat megoldásai

1.) Vízszintes helyzetű, mindkét végén zárt, L hosszúságú üvegcső közepén egy Δ



hosszúságú higanycsepp található. A csőben összesen $n=1$ mólnyi, t hőmérsékletű gáz található (a cső keresztmetszete A és a γ_{Hg} adott).

a) Mekkora az üvegcsőbe zárt levegő nyomása ($p=?$)? **5 pont**

b) Mekkora a Hg súlypontjának a süllyedése ($h=?$) ha az üvegcsövet súlypontja körül elforgatva függőlegesre állítjuk? **20 pont**

c) Mennyi hőt ad le a rendszer az izoterm környezetének ($Q=?$) a cső az elforgatásakor? **10 pont**

Megoldás:

Legyen: $T = t + 273$;

a **kezdeti** hossza az egyik oldalon bezárt gáznak: $\ell_o = \frac{1}{2}(L - \Delta)$,

a **kezdeti** térfogata: $V_o = \ell_o \cdot A$; az összes gáz térfogat : $V_{gáz} = 2V_o$;

az **elforgatást követően**:

-a felső hossz ℓ_1 ; az alsó hossz ℓ_2 : $\ell_1 = \ell_o + h$; $\ell_2 = \ell_o - h$

-Kezdetben a nyomás p_o , amely a mólszám ismeretében az **általános**

gáztörvényből meghatározható: $pV = nRT$; azaz $p_o V_o = \frac{n}{2} RT$; tehát

$$1.a) \quad p_o = \frac{1}{2} \frac{RT}{\ell_o A}$$

Elforgatás után, a felső részben a nyomás p_1 ; az alsó részben p_2 :

A két térrész nyomáskülönbsége tart egyensúlyt a Hg csepp hidrosztatikai nyomásával: $p_2 - p_1 = p_{Hg} = \gamma_{Hg} \cdot \Delta$

-Felül a kezdeti nyomás p_o -ról p_1 -re izoterm módon csökken:

$$\text{(Boyle-Mariotte törvény): } p_o \ell_o = p_1 \ell_1 = \frac{1}{2} RT$$

-Alul a kezdeti nyomás p_o -ról p_2 -re izoterm módon nő:

$$\text{(Boyle-Mariotte törvény): } p_o \ell_o = p_2 \ell_2 = \frac{1}{2} RT$$

$$\text{Így } \gamma_{Hg} \Delta = p_2 - p_1 = p_o \ell_o \left(\frac{1}{\ell_2} - \frac{1}{\ell_1} \right) = p_o \ell_o \left(\frac{1}{\ell_o - h} - \frac{1}{\ell_o + h} \right) = p_o \ell_o \left(\frac{2h}{\ell_o^2 - h^2} \right)$$

$$(\ell_o^2 - h^2) \gamma_{Hg} \Delta = 2h p_o \ell_o, \text{ azaz } h^2 \gamma_{Hg} \Delta + 2h p_o \ell_o - \ell_o^2 \gamma_{Hg} \Delta = 0$$

$$1.b) \quad h = \frac{-p_o \ell_o \pm \sqrt{(p_o \ell_o)^2 + \ell_o^2 (\gamma_{Hg} \Delta)^2}}{\gamma_{Hg} \Delta}$$

1.c) Izoterm folyamatra: $Q = \Delta U - W$; $\Delta U = 0$; $Q = nRT \int_{\text{kezd}}^{\text{vég}} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_{\text{vég}}}{V_{\text{kezd}}}$

$$Q = \frac{1}{2} nRT \left(\ln \frac{V_2}{V_o} + \ln \frac{V_1}{V_o} \right) = \frac{1}{2} nRT \left(\ln \frac{V_1 V_2}{V_o^2} \right)$$

Másképpen: $Q = W_{\text{gáz}} = W_{\text{Hg}}$

a Hg által végzett munka \equiv az ő helyzeti energiájának a megváltozása:

$$W_{\text{Hg}} = \Delta E_{\text{pot}}^{\text{Hg}} = m_{\text{Hg}} gh; \text{ tehát } Q = (\rho V_{\text{Hg}}) gh = \gamma_{\text{Hg}} (\Delta A) h$$

2.) Egy kölcsönható, **nem ideális gáz** lehetséges állapotegyenlete:

$$pV = nRT \left(1 - \frac{nb}{V} \right), \text{ (ahol } b \text{ a gázra jellemző pozitív moláris konstans).}$$

Határozd meg a gáz térfogati hőtágulási együtthatóját ($\alpha_V = ?$) a hőmérséklet és a térfogat függvényében! 25 pont

Megoldás:

$$\text{Definíció: } \alpha_V = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p;$$

Deriválva a $pV = nRT \left(1 - \frac{nb}{V} \right)$ állapotegyenletet: $f(p, V) = g(T, V)$;

$$df(p, V) = \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_V dp + \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)_p dV, \quad dg(T, V) = \left(\frac{\partial g}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial g}{\partial V} \right)_T dV$$

$df(p, V) = dg(T, V)$; azaz

$$df(p, V) = V dp + p dV \quad \text{és} \quad dg(T, V) = nR \left(1 - \frac{nb}{V} \right) dT + nRT \left(\frac{nb}{V^2} \right) dV$$

A dV és dT megváltozások olyan hányadosát keressük, amelyben $p = \text{állandó}$, azaz $dp = 0$:

$$df(p, V) = p dV = nR \left(1 - \frac{nb}{V} \right) dT + nRT \left(\frac{nb}{V^2} \right) dV = dg(T, V)$$

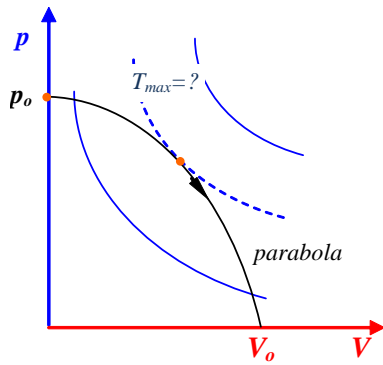
szeparálva (egyoldalra rendezve) a **megváltozásokat**:

$$p dV - nRT \left(\frac{nb}{V^2} \right) dV = nR \left(1 - \frac{nb}{V} \right) dT \quad \text{és hányadosot képezve:}$$

$$\left(\frac{dV}{dT} \right)_p = \frac{nR \left(1 - \frac{nb}{V} \right)}{\left(p - nRT \left(\frac{nb}{V^2} \right) \right)}$$

$$\alpha_V = \frac{nR \left(1 - \frac{nb}{V} \right)}{\left(pV - nRT \left(\frac{nb}{V} \right) \right)} = \frac{nR \left(1 - \frac{nb}{V} \right)}{\left(nRT \left(1 - \frac{nb}{V} \right) - nRT \left(\frac{nb}{V} \right) \right)} = \frac{1}{T} \left[\frac{1 - \frac{nb}{V}}{1 - 2 \frac{nb}{V}} \right]$$

3.) Számold ki a $p(V) = p_o(1 - \frac{V^2}{V_o^2})$ **parabolikus** folyamatra



a) az ideális gáz hőkapacitását ($n C_{par.=?}$)!

25 pont

b) Mekkora az elérhető legmagasabb hőmérséklet ($T_{max}=?$) ebben a folyamatban?

25 pont

Megoldás:

$$3.a) C_{foly} = \frac{1}{n} \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_{foly} \right) = \frac{1}{n} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{foly} - p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{foly} \right) = C_V + \frac{1}{n} \left(p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{foly} \right)$$

a) $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{foly}$ derivált meghatározása az alaplépés!

A $pV = nRT$ állapotegyenletet deriválva: $V dp + p dV = nRdT$

A folyamat egyenletének deriválásával kiszűrjük ki a szükségtelen változót

(dp -t); $dp = p_o(0 - \frac{2V}{V_o^2})dV$; tehát $Vdp = -2p_o \frac{V^2}{V_o^2} dV$;

A dp nélküli derivált állapotegyenlet tehát: $p dV - 2p_o \frac{V^2}{V_o^2} dV = nRdT$, illetve

$p_o(1 - 3\frac{V^2}{V_o^2})dV = nRdT$, innen a folyamat derivált:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{foly} = \frac{nR}{p_o(1 - 3\frac{V^2}{V_o^2})} \cdot p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{foly} = \frac{nR \left(p_o(1 - \frac{V^2}{V_o^2}) \right)}{p_o(1 - 3\frac{V^2}{V_o^2})}$$

A folyamat mólhője: $C_{foly} = C_V + R \left(\frac{(1 - \frac{V^2}{V_o^2})}{(1 - 3\frac{V^2}{V_o^2})} \right)$,

A hőkapacitás ennek n szerese!

3.b) A maximális hőmérséklet T-ben szélsőérték, a helye pl. ott van ahol a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{\text{foly.}} = \left(\frac{nR}{p_o(1-3\frac{V^2}{V_o^2})}\right)^{-1} = 0; \text{ azaz } p_o(1-3\frac{V^2}{V_o^2})=0, \text{ vagyis}$$

$$V_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{3}}V_o, \text{ ilyenkor } p_{\text{max}} = \frac{2}{3}p_o; T_{\text{max}} = \frac{p_{\text{max}}V_{\text{max}}}{nR} = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\frac{p_oV_o}{nR}$$

Ezen a helyen a mólhő ∞ , hiszen a folyamat az izotermán halad (simul)!

-A szélsőérték úgy is kiszámítható, hogy a p-V diagrammon a maximális hőmérsékletnél az érintők megegyeznek (simulnak): $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\text{foly.}} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\text{izoterma}}$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\text{foly.}} = p_o \frac{-2V_{\text{max}}}{V_o^2} = \frac{-p_{\text{max}}}{V_{\text{max}}} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\text{izoterma}}, \text{ hiszen a folyamatra}$$

$$Vdp = -2p_o \frac{V^2}{V_o^2} dV, \text{ illetve az izotermán } V dp + p dV = 0. \text{ Ezért}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\text{foly.}} = p_o \frac{-2V}{V_o^2}; \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\text{izoterma}} = \frac{-p}{V}$$

$$\text{Tehát } p_o \frac{2V_{\text{max}}^2}{V_o^2} = p_{\text{max}} = p_o(1 - \frac{V_{\text{max}}^2}{V_o^2}), \text{ azaz újra } V_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{3}}V_o.$$

Maximális pontszám: **110 pont**

-Az új ponthatárok: **2:** 40 pont-; **3:** 55 pont-; **4:** 70 pont-; **5:** 85 pont

Budapest, 2010. Március 23.

dr. Kojnok József