A MATEMATIKAI STATISZTIKA NEVEZETES ELOSZLÁSAI

DEFINÍCIÓ: A GAMMA-FÜGGVÉNY

A gamma-függvény $p>0$ valós számokon értelmezett függvény:

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx. \qquad (1)$$

A gamma-függvény tulajdonságai

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x}dx=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi},$$

az $x=u^2$ helyettesítést alkalmazva.

Az (1) definiciós képletből könnyen belátható, hogy ha $p\to 0$ vagy $p\to\infty$, akkor $\Gamma(p)\to\infty$.

Mivel a parciális integrálás szerint:

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx=\left[x^{p-1}\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^\infty-(p-1)\int_0^\infty x^{p-2}\frac{e^{-x}}{-1}dx=$$

$$=(p-1)\Gamma(p-1).$$

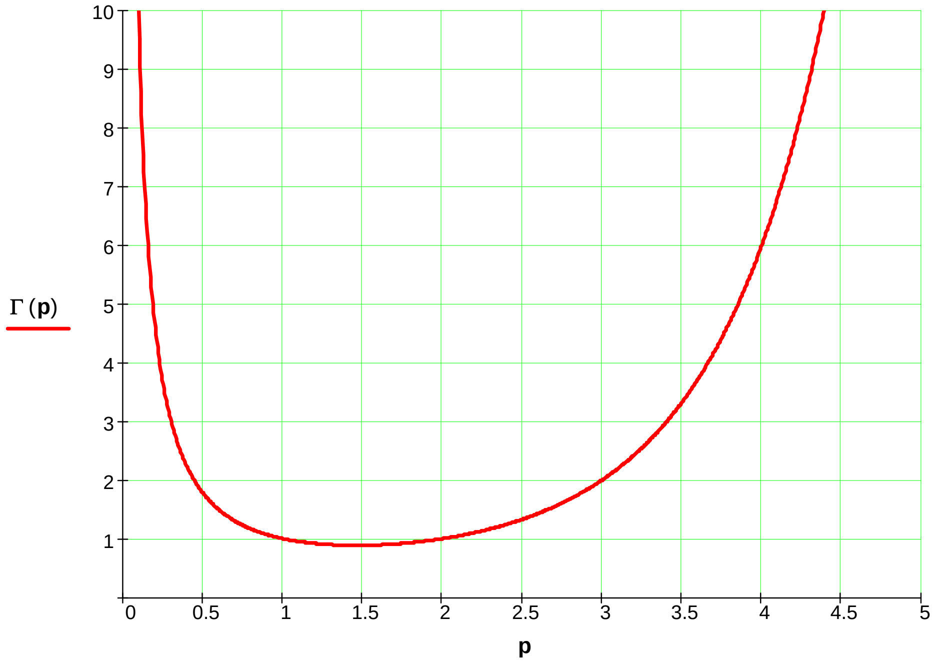
Tehát általában:

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1).$$

Innen következik, hogy a $p=n+1$ tetszőleges egész számra igaz, hogy

$$\Gamma(n+1)=n!\,.$$

A gamma-függvény tehát az egész számokon értelmezett faktoriális függvényt tetszőleges pozitív valós számokon értelmezett függvénnyé terjeszti ki.



A gamma függvény ábrája

Példa

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

DEFINÍCIÓ: χ^2-ELOSZLÁS

Legyen $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ n darab független, $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó. Ezekből képezünk egy új valószínűségi változót:

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 . \tag{3}$$

χ^2 eloszlását n szabadsági fokú χ^2-eloszlásnak nevezzük.

A χ^2-eloszlás sűrűségfüggvénye

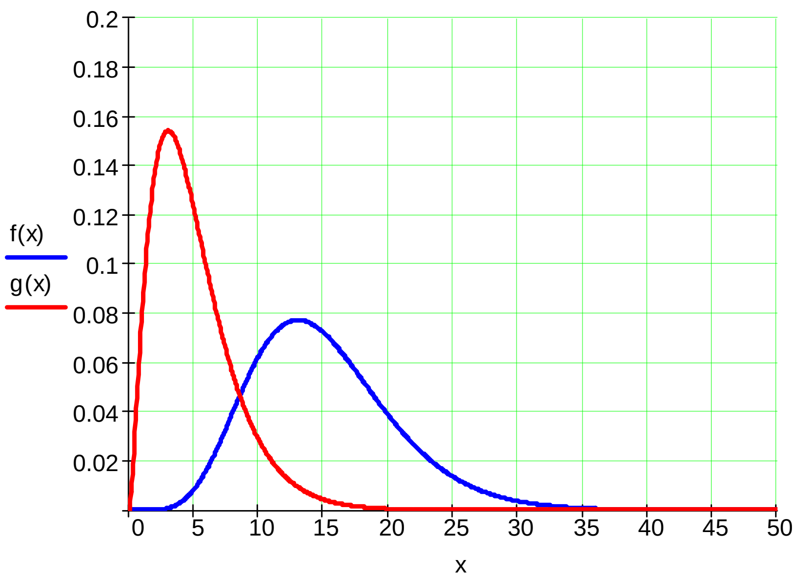
$$f_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \qquad x>0. \tag{4}$$

A χ^2-eloszlás várható értéke

$$M\left(\chi^2\right) = n .$$

A χ^2-eloszlás szórásnégyzete

$$D^2(\chi^2) = 2n .$$



Az n=5 (g(x)) és n=15 (f(x)) szabadsági fokú χ^2-eloszlás sűrűségfüggvénye

A χ-ELOSZLÁS

A χ^2-eloszlásból létrehozott

$$\chi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}$$

új valószínűségi változó eloszlását *n* szabadsági fokú χ-eloszlásnak nevezzük.

A χ-eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{2x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \qquad x>0.$$

A χ-eloszlás várható értéke

$$M(\chi) = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

A χ-eloszlás szórásnégyzete

$$D^2(\chi) = M(\chi^2) - M^2(\chi) = n - \frac{2\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Példa a χ-eloszlásra

$n=3$ esetén a χ-eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(\chi)=\frac{2x^2e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x>0.$$

Ez a Maxwell-eloszlás sűrűségfüggvénye.

DEFINÍCIÓ: STUDENT-ELOSZLÁS

Legyenek η, ξ_1, $\xi_{2,\dots,}$ ξ_n független, $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Ezekből képezünk egy új valószínűségi változót az alábbi képlet szerint:

$$t=\frac{\sqrt{n}\eta}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}}.$$

A t valószínűségi változó eloszlását n szabadsági fokú Student-eloszlásnak nevezzük. Az eloszlást néha *t-eloszlásnak* is nevezik.

A t-eloszlás sűrűségfüggvénye

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\left(\frac{x^2}{n}+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

A függvény értelmezési tartománya: $\quad -\infty<x<\infty$.

A Student-eloszlás várható értéke

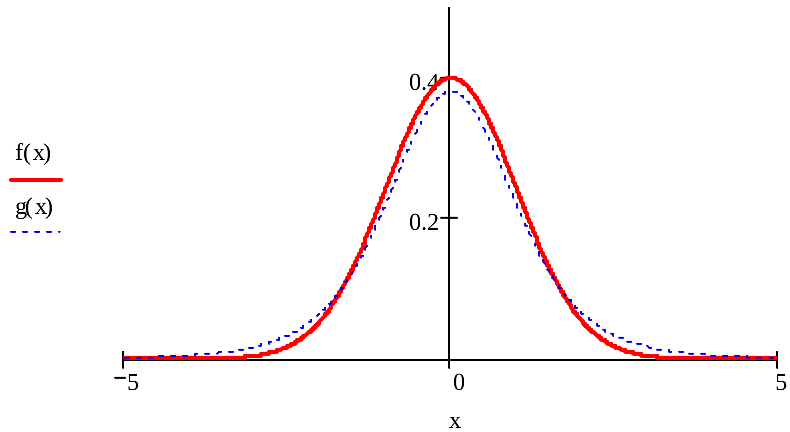
A Student-eloszlás egy szimmetrikus eloszlás a 0 pontra nézve, tehát a Student-eloszlás várható értéke (csak $n \geq 2$ esetén létezik) $M(t)=0$. Könnyen belátható, hogy $n=1$ esetén nem létezik várható érték.

A Student-eloszlás szórásnégyzete

$$D^2(t) = M(t^2) - M^2(t) = M(t^2) =$$

$$M(n\eta^2)M\left(\frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}\right) = \frac{n}{n-2}, \text{ ha } n \geq 3.$$

A Student-eloszlás sűrűségfüggvényének ábrája



Az N(0,1) eloszlás (f(x)) és az n=5 szabadsági fokú Student-eloszlás (g(x))sűrűségfüggvénye

Az Student-eloszlás sűrűségfüggvénye egyre nagyobb n értékekre tart a standart normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez.

DEFINÍCIÓ: *F*-ELOSZLÁS

Legyenek a ξ_1, ξ_2,…, ξ_m és az η_1, η_2,…, η_n valószínűségi változók függetlenek és $N(0,1)$ eloszlásúak. Az ezekből képezett F új valószínű-ségi változót az alábbi összefüggés definiálja:

$$F = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2}.$$

Az F valószínűségi változó eloszlását m, n szabadsági fokú F-eloszlásnak nevezzük.

Az F eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f_{m,n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{m}{2}-1}}, \quad x > 0.$$

Az F eloszlás várható értéke és szórásnégyzete:

$$M(F) = \frac{n}{n-2}, \quad n \geq 3.$$

$$D^2(F) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \quad n \geq 5.$$

Az n=5, m=5 szabadsági fokú F-eloszlás (g(x)) és az n=5 szabadsági fokú χ^2-eloszlás (f(x)) sűrűségfüggvénye