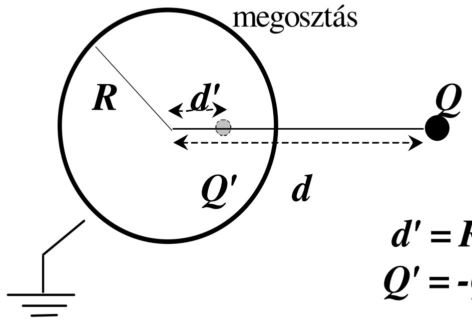
Konzultáció II.
Tükör töltés, gömbi inverzió

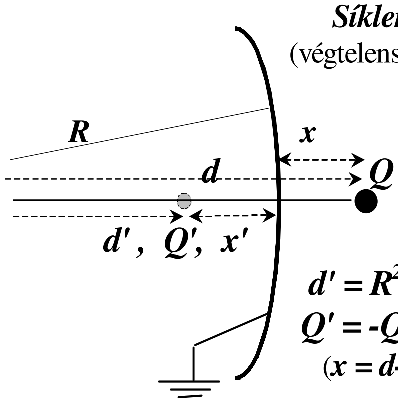
a) Fémgömb



$$d' = R^2/d$$
$$Q' = -Q\,R/d$$

b) Végtelensugarú kör, síklemez ($R \to \infty$)

Síklemez
(végtelensugarú gömb)



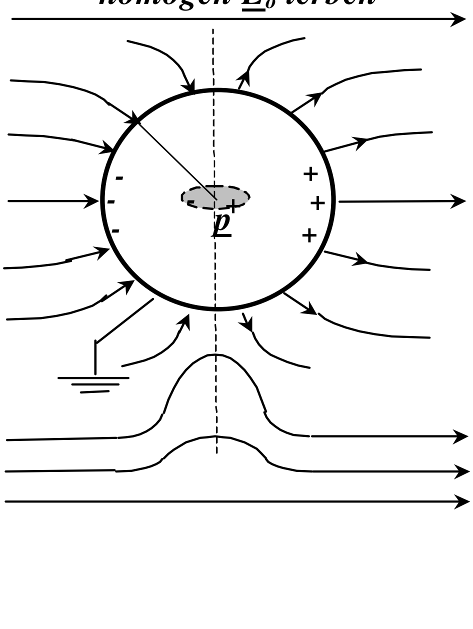
$$d' = R^2/d\,; \quad \Rightarrow x' = x$$
$$Q' = -Q\,R/d \Rightarrow Q' = -Q$$
$$(x = d-R;\; x' = R-d')$$

c) Végtelen távoli töltés adja az E_o homogén teret ($d \to \infty$)

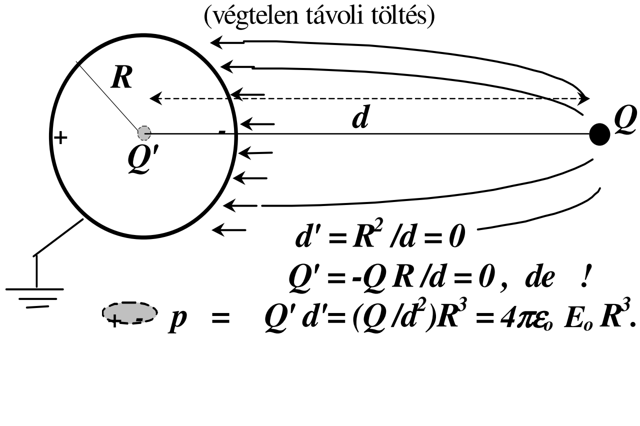
A felületi töltéseket helyettesítő dipólus dipólmomentuma :

$$\underline{p} = (4\pi\varepsilon_o)\, R^3\, E_o$$

Fémgömb
homogén $\underline{E}_o$ térben



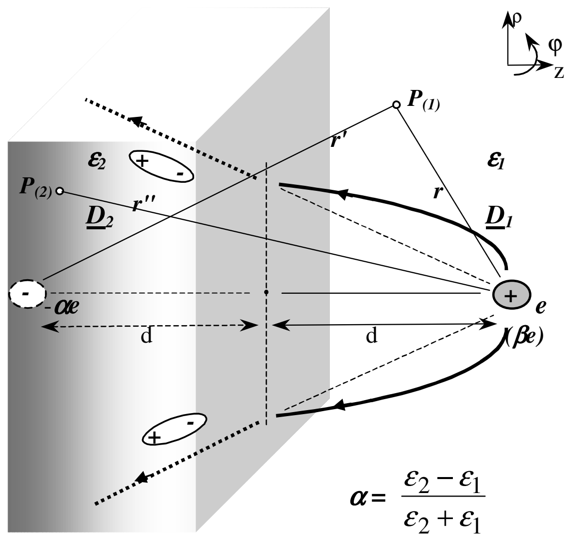
Fémgömb
E_o homogén térben ($= (1/4\pi\varepsilon_o)\, Q/d^2$)
(végtelen távoli töltés)



$$d' = R^2/d = 0$$
$$Q' = -Q\,R/d = 0\,, \text{ de } \;!$$
$$p \;=\; Q'\,d' = (Q/d^2)R^3 = 4\pi\varepsilon_o\, E_o\, R^3.$$

Elektromos tér inhomogén dielektrikumokban

a) Síkbeli határfeltételek



A potenciálok tartományonként:

$$U^P_{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{e}{\varepsilon_1 r} + \frac{-\alpha e}{\varepsilon_1 r'}\right);$$

A potenciál az (1) -es térrészben a ténylegesen meglevő (e) és a (2)-es dielektromos (ε_2) félteret reprezentáló (-αe) szuperpoziciója (ε_1 dielektromos árnyékolással) !

$$U^P_{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\beta e}{\varepsilon_2 r''}\right)$$

A potenciál a (2) -es térrészben nem tisztán a ténylegesen meglevő (e) -töltéstől származik, hanem az csak *árnyékoltan* látszik (βe) {+ még a kettes féltér saját dielektromos árnyékolási tényezője (ε_2) /a β *vegyes, részleges*-árnyékolási tényező még meghatározandó/}.

A határfeltételek: $D_{n1} = D_{n2}$ *és* $E_{t1} = E_{t2}$, azaz

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \;\; és \;\; E_{t1} = E_{t2}, \text{ ahol}$$

$$E_n = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad és \quad E_t = -\frac{\partial U}{\partial \rho}, \text{ tehát}$$

$$\varepsilon E_n = -\varepsilon_1\left(\frac{\partial U_{(1)}}{\partial z}\right)_{z=0} = -\varepsilon_2\left(\frac{\partial U_{(2)}}{\partial z}\right)_{z=0} \quad \text{és } E_t = -\left(\frac{\partial U_{(1)}}{\partial \rho}\right)_{z=0} = -\left(\frac{\partial U_{(2)}}{\partial \rho}\right)_{z=0}$$

A potenciál folytonosságával helyettesítsük a térerősség tangenciális komponensének folytonosságát:

$$U_{(1)}\big|_{z=0} = U_{(2)}\big|_{z=0}$$

A P pontot és a töltésekkel összekötő szakaszokat (r, r', r'') a P pont koordinátáival (z, ρ) kifejezve (, nehogy inkorrekten kezeljük a koordináták előjeleit a z szerinti deriváláskor).

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}\;;\; r' = \sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}\;;\; r'' = \sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}$$

Az azonos együtthatókkal egyszerűsítve:

$$\varepsilon_1\left(\frac{(1)(z-d)}{\varepsilon_1 r^3} + \frac{(-\alpha)(z+d)}{\varepsilon_1 r'^3}\right)_{z=0} = \varepsilon_2\left(\frac{(\beta)(z-d)}{\varepsilon_2 r''^3}\right)_{z=0} \quad \text{ill.} \quad \left(\frac{e}{\varepsilon_1 r} + \frac{-\alpha e}{\varepsilon_1 r'}\right)_{z=0} = \left(\frac{\beta e}{\varepsilon_2 r''}\right)_{z=0};$$

A z = 0 -esetén: r = r' = r'' , s az azonos együtthatókkal továbbegyszerűsítve:

$$1+\alpha=\beta \quad \text{ill.} \qquad \frac{1-\alpha}{\varepsilon_1}=\frac{\beta}{\varepsilon_2}$$

Az illesztés a határokon lehetséges a határsík végtelensok P (ρ, φ, z = 0) pontjában, ha az α -t és β-t a fenti egyenleteknek megfelelően választom, azaz:

$$\alpha=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}= \quad \beta=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

b) Gömbi határfeltételek

A potenciálok tartományonként különbözőek:

$$U^P_{(1)} = -E_o r \cos\vartheta + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{p}{r^2}\cos\vartheta \;;$$

A potenciál az (1)-es külső térrészben a homogén $\boldsymbol{E_o}$ tér és a dipólus potenciáljának összege. (ε_1=1). A belső (2)-es térrészben ($\varepsilon_2 = \varepsilon$) homogén, de kisebb $\boldsymbol{E_b}$ az elektromos tér.

$$U^P_{(2)} = -E_b r \cos\vartheta$$

A határfeltételek: $\quad D_{n1} = D_{n2}$ *és* $E_{t1} = E_{t2}$, azaz

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad \text{és} \quad E_{t1} = E_{t2} \text{, ahol}$$

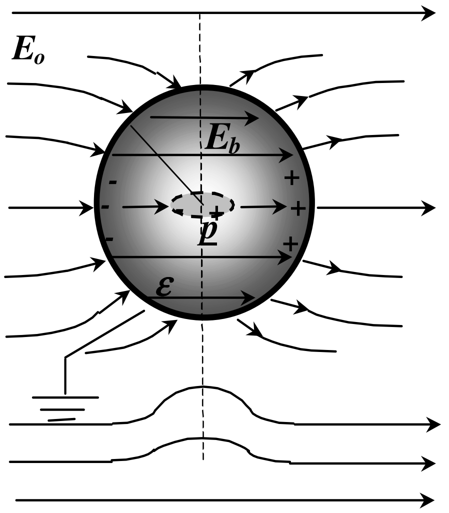
$$E_n = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{és} \quad E_t = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\vartheta} \text{, tehát}$$

$$\varepsilon E_n = -\varepsilon_1\left(\frac{\partial U_{(1)}}{\partial r}\right)_{r=R} = -\varepsilon_2\left(\frac{\partial U_{(2)}}{\partial r}\right)_{r=R} \qquad \text{és} \quad \left(\frac{\partial U_{(1)}}{\partial\vartheta}\right)_{r=R} = \left(\frac{\partial U_{(2)}}{\partial\vartheta}\right)_{r=R}$$

$$\text{azaz} \quad \left(U_{(1)}\right)_{r=R} = \left(U_{(2)}\right)_{r=R}$$

$$\left(-E_o - 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{p}{r^3}\right)_{r=R} = \varepsilon\left(-E_b\right)_{r=R} \qquad \text{és} \quad \left(-E_o r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{p}{r^2}\right)_{r=R} = -E_b r$$

Dielektromosgömb (ε)
homogén $\underline{E}_o$ térben



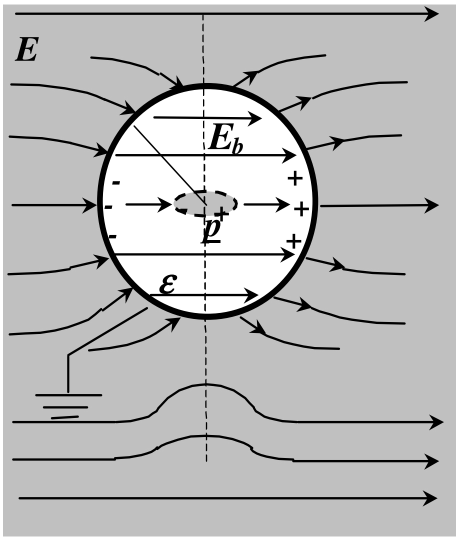
$$\boldsymbol{p = (4\pi\varepsilon_o)\, R^3\, E_{dep.}}$$

$$\boldsymbol{E_{b.} = \frac{3}{\varepsilon + 2} E_o}$$

$$\boldsymbol{E_{dep.} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_o}$$

$$\boldsymbol{E_{belső} = E_o - E_{depol.}}$$

Dielektromos gömbüreg ($\varepsilon_2 = 1$)
($\varepsilon_1 = \varepsilon$) dielektrikumbeli homogén $\underline{E}$ térben



$$\varepsilon_r = \varepsilon_2 / \varepsilon_1 = 1/\varepsilon; \text{ és def.: } P = p/V.$$

$$p = (4\pi\varepsilon_o)\, R^3\, E_{dep.} = P\, V_{gömb} = P\,(4\pi/3)\, R^3$$

, ahonnan: $E_{dep.} = P/3\varepsilon_o$

$$E_{ü.} = \frac{3}{\varepsilon^{-1} + 2}\, E = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}\, E$$

$$E_{dep.} = \frac{\varepsilon^{-1} - 1}{\varepsilon^{-1} + 2}\, E = \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon + 1}\, E \quad (<0\ !)$$

$$E_{üreg} = E - E_{depol.} = E + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} E$$

avagy: $E_{üreg} = E + P/3\varepsilon_o$!

(P nem az üregbeli , hanem a dielektrikumbeli dip. mom. sűrűség, ezért additív!)