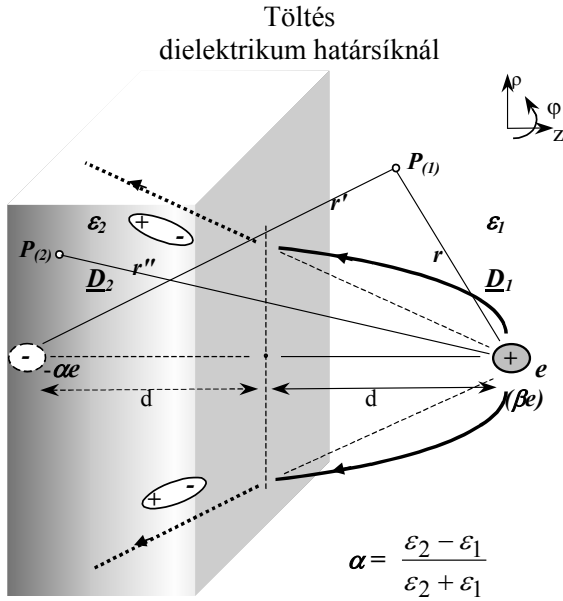


Konzultáció

Elektromos tér inhomogén dielektrikumokban

a) Síkbeli határfeltételek



A potenciálok tartományonként:

$$U_{(1)}^P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{\epsilon_1 r} + \frac{-\alpha e}{\epsilon_1 r'} \right);$$

A potenciál az (1) -es térrészben a ténylegesen meglévő (e) és a (2)-es dielektromos (ϵ_2) féltérrel reprezentálható $(-\alpha e)$ szuperpozíciója (ϵ_1 dielektromos árnyékolással) !

$$U_{(2)}^P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\beta e}{\epsilon_2 r''} \right)$$

A potenciál a (2) -es térrészben nem tisztán a ténylegesen meglévő (e) -töltéstől származik, hanem az csak *árnyékoltan* látszik (βe) {+ még a kettes féltér saját dielektromos árnyékolási tényezője (ϵ_2) /a β vegyes, részleges-árnyékolási tényező még meghatározandó/}.

$$\alpha = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}$$

A határfeltételek:

$$D_{n1} = D_{n2} \text{ és } E_{t1} = E_{t2} , \text{ azaz}$$

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2} \text{ és } E_{t1} = E_{t2} , \text{ ahol}$$

$$E_n = -\frac{\partial U}{\partial z} \text{ és } E_t = -\frac{\partial U}{\partial \rho}, \text{ tehát}$$

$$\epsilon E_n = -\epsilon_1 \left(\frac{\partial U_{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} = -\epsilon_2 \left(\frac{\partial U_{(2)}}{\partial z} \right)_{z=0} \text{ és } E_t = -\left(\frac{\partial U_{(1)}}{\partial \rho} \right)_{z=0} = -\left(\frac{\partial U_{(2)}}{\partial \rho} \right)_{z=0}$$

A potenciál folytonosságával helyettesítsük a térerősség tangenciális komponensének folytonosságát:

$$U_{(1)}|_{z=0} = U_{(2)}|_{z=0}$$

A P pontot és a töltésekkel összekötő szakaszokat (r, r', r'') a P pont koordinátaival (z, ρ) kifejezve (, ahogy inkorrekten kezeljük a koordináták előjeleit a z szerinti deriválásakor).

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z-d)^2} ; r' = \sqrt{\rho^2 + (z+d)^2} ; r'' = \sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}$$

Az azonos együtthatókkal egyszerűsítve:

$$\epsilon_1 \left(\frac{(1)(z-d)}{\epsilon_1 r^3} + \frac{(-\alpha)(z+d)}{\epsilon_1 r'^3} \right)_{z=0} = \epsilon_2 \left(\frac{(\beta)(z-d)}{\epsilon_2 r''^3} \right)_{z=0} \text{ ill. } \left(\frac{e}{\epsilon_1 r} + \frac{-\alpha e}{\epsilon_1 r'} \right)_{z=0} = \left(\frac{\beta e}{\epsilon_2 r''} \right)_{z=0} ;$$

A $z = 0$ -esetén: $r = r' = r''$, s az azonos együtthatókkal továbbegyszerűsítve:

$$1 + \alpha = \beta \quad \text{ill.} \quad \frac{1 - \alpha}{\varepsilon_1} = \frac{\beta}{\varepsilon_2}$$

Az illesztés a határokon lehetséges a határsík végtelensok $P(\rho, \varphi, z = 0)$ pontjában, ha az α -t és β -t a fenti egyenleteknek megfelelően választom, azaz:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \beta = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

b) Gömbi határfeltételek

A potenciálok tartományonként különbözőek:

$$U_{(1)}^P = -E_o r \cos \vartheta + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{p}{r^2} \cos \vartheta ;$$

A potenciál az (1)-es külső térrészben a homogén E_o tér és a dipólus potenciáljának összege. ($\epsilon_1=1$). A belső (2)-es térrészben ($\epsilon_2 = \epsilon$) homogén, de kisebb E_b az elektromos tér.

$$U_{(2)}^P = -E_b r \cos \vartheta$$

A határfeltételek: $D_{n1} = D_{n2}$ és $E_{t1} = E_{t2}$, azaz

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2} \text{ és } E_{t1} = E_{t2}, \text{ ahol}$$

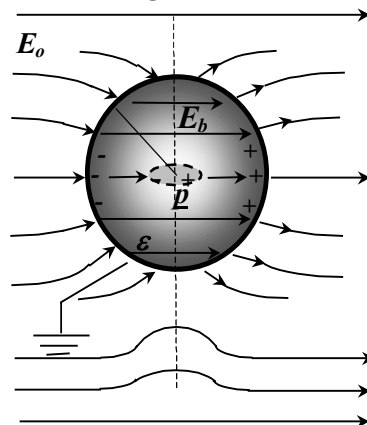
$$E_n = -\frac{\partial U}{\partial r} \text{ és } E_t = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta}, \text{ tehát}$$

$$\epsilon E_n = -\epsilon_1 \left(\frac{\partial U_{(1)}}{\partial r} \right)_{r=R} = -\epsilon_2 \left(\frac{\partial U_{(2)}}{\partial r} \right)_{r=R} \text{ és } \left(\frac{\partial U_{(1)}}{\partial \vartheta} \right)_{r=R} = \left(\frac{\partial U_{(2)}}{\partial \vartheta} \right)_{r=R}$$

azaz $(U_{(1)})_{r=R} = (U_{(2)})_{r=R}$

$$\left(-E_o - 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{p}{r^3} \right)_{r=R} = \epsilon (-E_b)_{r=R} \text{ és } \left(-E_o r + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{p}{r^2} \right)_{r=R} = -E_b r$$

**Dielektromosgömb (ϵ)
homogén E_o térben**



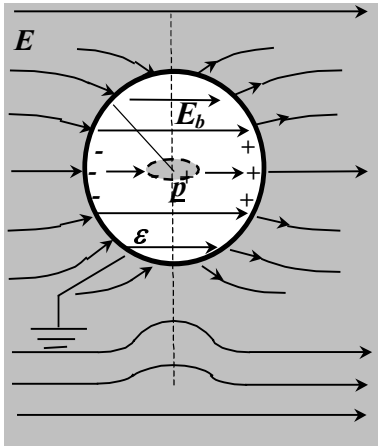
$$p = (4\pi\epsilon_o) R^3 E_{dep.}$$

$$E_b = \frac{3}{\epsilon + 2} E_o$$

$$E_{dep.} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_o$$

$$E_{belső} = E_o - E_{depol.}$$

Dielektromos gömbüreg ($\epsilon_2 = 1$)
 ($\epsilon_1 = \epsilon$) dielektrikumbeli homogén \underline{E} térben



$$\epsilon_r = \epsilon_2 / \epsilon_1 = 1 / \epsilon; \text{ és def.: } P = p / V.$$

$$p = (4\pi\epsilon_0) R^3 E_{dep.} = P V_{gömb} = P (4\pi/3) R^3$$

, ahonnan: $E_{dep.} = P/3\epsilon_0$

$$E_{ü.} = \frac{3}{\epsilon^{-1} + 2} E = \frac{3\epsilon}{2\epsilon + 1} E$$

$$E_{dep.} = \frac{\epsilon^{-1} - 1}{\epsilon^{-1} + 2} E = \frac{1 - \epsilon}{2\epsilon + 1} E (<0 !)$$

$$E_{üreg} = E - E_{depol.} = E + \frac{\epsilon - 1}{2\epsilon + 1} E$$

avagy: $E_{üreg} = E + P/3\epsilon_0 !$

(P nem az üregbeli, hanem a dielektrikumbeli dip. mom. sűrűség, ezért additív!)