ELTE I.Fizikus 2004/2005 II.félév

KISÉRLETI FIZIKA

Elektrodinamika

8. (IV.19-22.)

Újból elektromágneses hullám:

$$div\,\underline{D}=0\,;\; rot\,\underline{E}=-\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\,;\; rot\,\underline{H}=\underline{j}+\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}\,;\;\; div\,\underline{B}=0$$

$$\underline{D}=\varepsilon\,\underline{E};\underline{B}=\mu\,\underline{H}$$

$$div\,\underline{E}=0\,;\; rot\,\underline{E}=-\mu\frac{\partial \underline{H}}{\partial t}\,;\; rot\,\underline{H}=\varepsilon\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\,;\;\; div\,\underline{H}=0$$

$$rot\,rot\,\underline{E}=-\mu\frac{\partial\left(rot\,\underline{H}\right)}{\partial t}$$

$$rot\,rot\,\underline{E}=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}$$

$$grad\;div\,\underline{E}-\Delta\,\underline{E}=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}\,;\;\;\Delta\,\underline{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\varepsilon\mu=\frac{1}{\mathbf{v}^2}\;\;;$$

$$\textit{vákuumban:}\;\; \mathbf{v}=\mathbf{c}$$

Hullámegyenlet:

$$\Delta\,\underline{E}-\frac{1}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}=0\,;\;\Delta\,\underline{H}-\frac{1}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial t^2}=0$$

Hullámegyenlet $\underline{E}$-re:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2}-\frac{1}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}=0$$

Milyen az ilyen hullámegyenlet:

Vektorra transzverzális / longitudinális hullám

Skalárra: $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{1}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0\,;\;\Delta\Phi-\frac{1}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0$$

Egyszerűsítés:

$$\rho = 0;\; j = 0;\; \underline{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\; \underline{D} = \varepsilon \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t};$$

$$0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Rightarrow B_x = áll. = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$Általában: E_x = E_x(y,z)$

$speciálisan:$

$E_x = E_x(z); vagy\; E_x = E_x(y)$

Vizsgáljuk a $E_x = E_x(z)$ esetet:

Ekkor $B_z = áll. = 0$, tehát:

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ H_y(z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

A megmaradó egyenleteink:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \text{és} \quad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t}, \text{ tehát}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}.$$

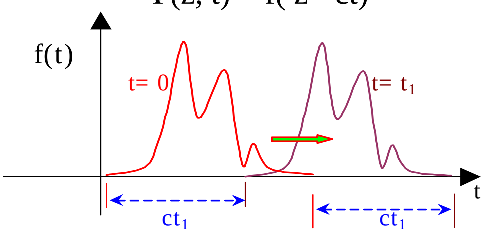
Ezek így egy egyszerű egydimenziós hullámegyenletek:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Diszperzió mentes hullám.

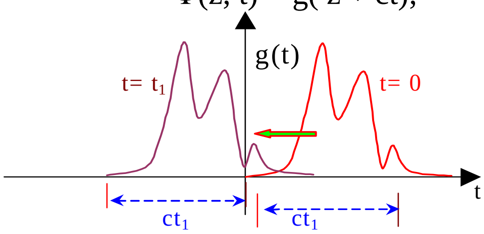
Két megoldás van:

$\Phi(z, t) = f(z - ct)$



$$f'' = \frac{1}{c^2} f'' c^2$$

$\Phi(z, t) = g(z + ct);$



$$g'' = \frac{1}{c^2} g'' c^2$$

Az általános megoldás:

$\Phi(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct);$

Speciálisan: ha $E_x(z, t) = f(z - ct)$;

ekkor: $\frac{\partial E_x}{\partial z} = f' = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}\; ;\Rightarrow$

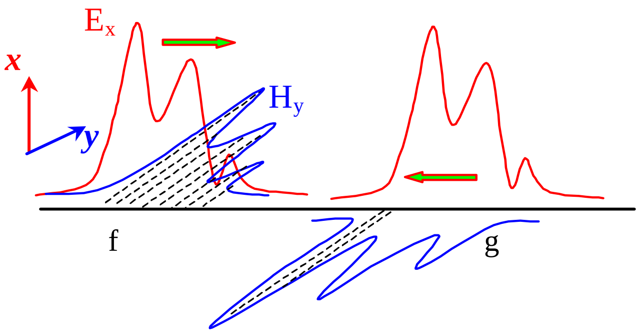
$$H_y = \frac{1}{\mu c} f(z - ct)$$

Speciálisan: ha $E_x(z, t) = g(z + ct)$;

ekkor: $\frac{\partial E_x}{\partial z} = g' = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}\; ;\Rightarrow$

$$H_y = -\frac{1}{\mu c} g(z + ct)$$

ahol [$\varepsilon c = 1/\mu c$] , vagy [$\varepsilon \mu c^2 = 1$]



Transzverzális hullám.

Harmonikus hullám: (f, g egyszerű trigonometrikus függvények).

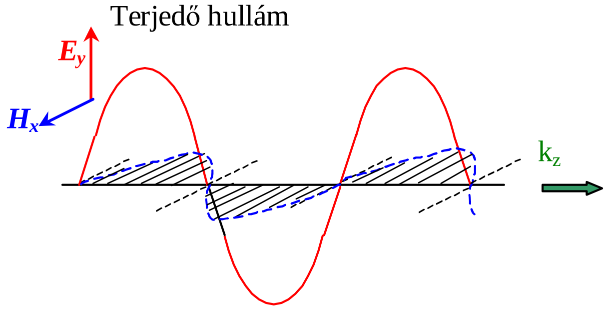
$$E_x\,(z, t) = A \cos\{k(z - ct) - \varphi\} = A \cos\{(k z - k c t) - \varphi\} = A \cos\{(\omega t - k z) + \varphi\}$$

$\omega = c k$ $\cos(\omega t - k z)$

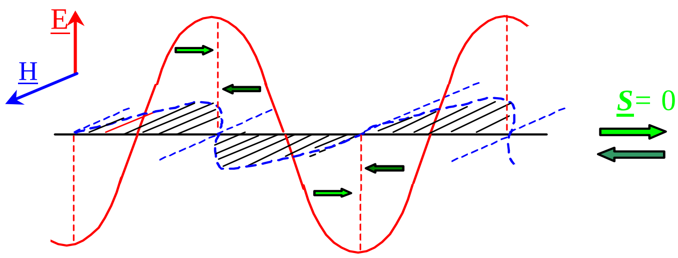
ω -körfrekvencia ; k -hullámszám $\sin(\omega t - k z)$

$\omega = 2\pi \nu = 2\pi/T$; $k = 2\pi/\lambda$

Terjedő hullám



Állóhullám



Ez egy speciális hullám (az energia (S) oda-vissza áramlik) :

$$E_x\,(z, t) = A \{\cos(\omega t - k z) + \cos(\omega t + k z)\} = 2 A \cos(\omega t) \cos(k z)$$
$$H_y\,(z, t) = (A/\mu c) \{\cos(\omega t - k z) - \cos(\omega t + k z)\} = 2 (A/\mu c) \sin(\omega t) \sin(k z)$$

Diszperzió ε(ω), μ(ω):

Leginkább a dielektromos állandó függ a frekvenciától:
(A μ_r -t általában frekvencia-függetlennek tekintjük)

$\underline{E} = \underline{E}_o\, e^{i(\omega t - \underline{k}\,\underline{r})}$ (ill. ennek valós része)

$\underline{H} = \underline{H}_o\, e^{i(\omega t - \underline{k}\,\underline{r})}$ ill. ennek valós része, azaz harmonikus hullám

$$\underline{\boldsymbol{E}} = \underline{E}_o \cos(\omega t - \underline{k}\,\underline{r}) = Re\left[\underline{E}_o\, e^{i(\omega t - \underline{k}\,\underline{r})}\right] ;\ \underline{\boldsymbol{H}} = = Re\left[\underline{H}_o\, e^{i(\omega t - \underline{k}\,\underline{r})}\right];$$

$$\underline{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{\varepsilon_r\, \varepsilon_o\, \underline{E}} = \boldsymbol{\varepsilon\, \underline{E}}\ ;\ \underline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\mu_r\, \mu_o\, \underline{H}} = \boldsymbol{\mu\, \underline{H}}$$

$$\underline{\boldsymbol{D}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) = \underline{D}_o\, e^{i(\omega t - \underline{k}\,\underline{r})} = \varepsilon\, \underline{E}_o\, e^{i(\omega t - \underline{k}\,\underline{r})} ;\ \underline{\boldsymbol{B}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) = \underline{B}_o\, e^{i(\omega t - \underline{k}\,\underline{r})} = \mu\, \underline{H}_o\, e^{i(\omega t - \underline{k}\,\underline{r})}$$

$div\, \underline{D} = 0$; $\quad \underline{\nabla}\, \underline{D} = 0 \quad -\underline{k}\, \underline{D}_o = -\underline{k}\, \underline{E}_o = 0$

$div\, \underline{B} = 0$; $\quad \underline{\nabla}\, \underline{B} = 0 \quad -\underline{k}\, \underline{B}_o = -\underline{k}\, \underline{H}_o = 0$

transzverzális hullám

$rot\, \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}$; $\quad \underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B} \quad -\underline{k} \times \underline{E}_o = -\omega \underline{B}_o = -\omega\, \mu \underline{H}_o$

$rot\, \underline{H} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}$; $\quad \underline{\nabla} \times \underline{H} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} \quad -\underline{k} \times \underline{H_o} = \omega \underline{D}_o = \omega\, \varepsilon \underline{E}_o$

Az első két egyenletből $\underline{\boldsymbol{E_o}}$ **,** $\underline{\boldsymbol{H_o}}$ is merőleges $\underline{\boldsymbol{k}}$ –ra (transzverzális hullám)
a harmadik-negyedik egyenletekből $\underline{\boldsymbol{E_o}}$ $\underline{\boldsymbol{H_o}}$ egymásra is merőlegesek!

Sőt: $\underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{E}_o) = \underline{k} \times \omega\, \mu \underline{H}_o = \underline{k}\,(\underline{k}\, \underline{E}_o) - k^2\, \underline{E}_o = \omega\, \mu (\underline{k} \times \underline{H}_o) = -\omega^2\, \varepsilon\mu \underline{E}_o$

tehát : $k^2 = \omega^2\, \varepsilon\mu$; avagy $\omega^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} k^2$; illetve $\omega = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} k$.

Vákuumban: $\omega = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} k = c\, k$ (c a vákuumbeli fénysebesség)

Nem vákuumban (ha ε_r = állandó, μ_r = állandó): $\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} k = v_f\, k$

(v a közegbeni fázissebesség: v_f = c/n), ahol n a törésmutató: $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$.

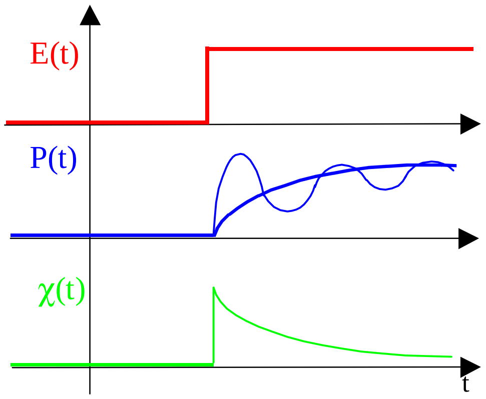
Amennyiben a $\omega = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} k$ függvényben, a $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ tagnak is van frekvencia függése az $\omega(k)$ függvény nem egyenes.

Mit jelent az $\varepsilon(\omega)$ függése: $\varepsilon = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\omega}{k}\right)^{-2}$.

Az $\varepsilon_r(\omega)$ ha nem állandó /frekvenciafüggő/, ha az ω(k) függvény nem lineáris.

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_o(1+\chi(\omega))$$

Eddig $\underline{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{\varepsilon_o}\,\boldsymbol{\chi}\,\underline{\boldsymbol{E}}$, a kauzalitás miatt ez nem tartható



$$\underline{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{\chi}\,\boldsymbol{\varepsilon_o}\,\underline{\boldsymbol{E}}$$

$$P(t) = \varepsilon_o \int_{-\infty}^{t} \chi(t-t')\,\underline{E}(t')\,dt'$$

$$E(t) = E_o\, e^{i\omega t}$$

$$P(t) = \varepsilon_o \int_{-\infty}^{t} \chi(t-t')\,\underline{E}_{\,o}\, e^{i\omega t'}\,dt'$$

$$P(t) = \varepsilon_o \int_{-\infty}^{t} \chi(t-t')\,E_o\, e^{i\omega t'}dt = \varepsilon_o \int_{-\infty}^{t} \chi(t-t')\,E_o e^{i\omega(t'-t)} e^{i\omega t} dt' = \varepsilon_o \int_{-\tau=-\infty}^{0} \chi(\tau) e^{-i\omega\tau} d(-\tau) E_o e^{i\omega t}$$

ahol $\tau = t-t'$, *avagy* $\chi(\omega) = \int_0^\infty \chi(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d(\tau)$ *jelöléssel*:

$$\underline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{o}} = \boldsymbol{\varepsilon_o}\,\boldsymbol{\chi(\omega)}\,\underline{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{o}}$$

Keressük a Maxwell egyenletek hullámmegoldásait

II. Gömbhullám

Skalár tér (nem feltétlenül potenciál!):

A hullámegyenlet: $\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$,

ahol $\boldsymbol{\Phi}$ skalár és $\Phi = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}$ (jelölés: k r = $|\underline{k}|\,|\underline{r}|$).

$$grad\ \Phi = \left(-\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r^2} - ik\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\right)\frac{\underline{r}}{r}$$ ((fg)'= f'g + fg' és (fg)''= f''g + 2f'g' + fg'')

$$div\ grad\ \Phi = div\left\langle\left\{\left(-\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r^2}\right)+\left[-ik\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\right]\right\}\left\{\frac{\underline{r}}{r}\right\}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial r}\left\{\left(-\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r^2}\right)+\left[-ik\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\right]\right\}\left\{\frac{\underline{r}}{r}\frac{\underline{r}}{r}\right\}+\left\{\left(-\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r^2}\right)+\left[-ik\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\right]\right\}\left\{div\frac{\underline{r}}{r}\right\}\right\rangle$$

$$= \left\{\left(2\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r^3}+ik\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r^2}\right)+\left[ik\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r^2}+(-ik)^2\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\right]\right\}\left\{\frac{\underline{r}}{r}\frac{\underline{r}}{r}\right\}+$$
$$+\left\{\left(-\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r^2}\right)+\left[-ik\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\right]\right\}+\left\{\frac{(div\,\underline{r})r-\underline{r}(1\underline{r})}{r^2}\right\}$$

(Mivel:div $\underline{r}$ = 3, ezért $div\frac{\underline{r}}{r} = \left\{\frac{(div\,\underline{r})r-\underline{r}(1\underline{r})}{r^2}\right\} = \frac{2}{r}$)

$$\Delta\Phi = \left\{2\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r^3}+2ik\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r^2}-k^2\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\right\}\{1\}+\left\{\left(-\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r^2}\right)+\left[-ik\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}\right]\right\}+\left\{\frac{2}{r}\right\}$$

A "kiejtések" után marad:

$$\Delta\Phi = -k^2\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r} = -k^2\,\Phi$$

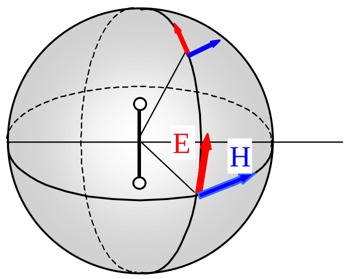
A $\Delta\Phi = -k^2\,\Phi$, és a $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\omega^2\Phi$ miatt

A diszperziós reláció továbbra is: $\omega^2 = c^2 k^2$

Gömbsugárzók:

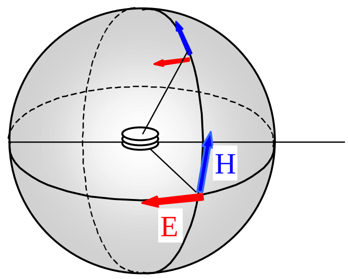
Az elektromágneses hullámuk anizotróp:

Elektromos dipólsugárzó



forrás: elektromos dipól
dipól antenna

Mágneses dipólsugárzó

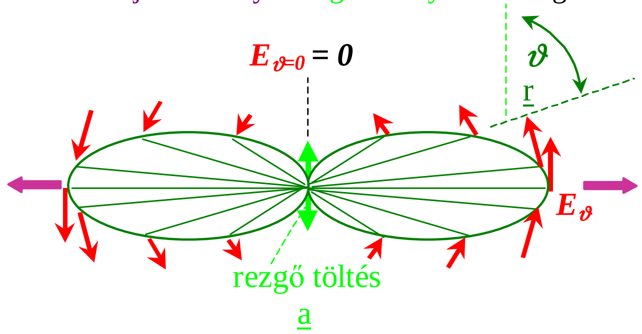


forrás: mágneses dipól
(köráram)
ferrit antenna

Egy ***sugárzó dipólus*** tere ($E_\vartheta = E(r)\sin\vartheta$, ahol ϑ ($\underline{a}\angle\underline{r}$) és $E_\vartheta \perp \underline{r}$)

A dipól sugárzás irányfüggése

Az E térerősség a terjedési irányra merőleges,
a fő terjedési irány a rezgési irányra merőleges.



$E_\vartheta \sim \sin\vartheta / r$

$(I \sim S \sim E \times H \sim E_\vartheta^2 \sim \sin^2\vartheta / r^2$!