ELTE I.Fizikus 2004/2005 II.félév

KISÉRLETI FIZIKA
Elektrodinamika
5. (III. 8-11.)

A mágneses tér

- Két mágnes kölcsönhatása
- Áram hat mágnesre (vezetékben levő áram forgatja az iránytűt)
- Mágnes hat áramra (display)
- Áram hat áramra

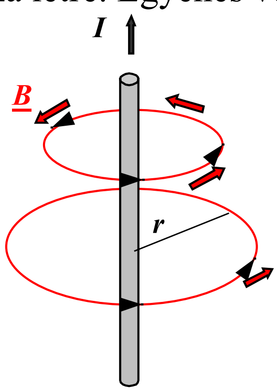
A mágnes létrehoz egy teret (mezőt) ami hat a mozgó töltésre (áramra).

A Lorentz erő, a $\underline{B}$ vektor (mágneses indukció) definíciója

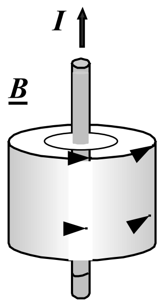
1.) Az erő ⊥ merőleges az elektronok sebességére.
2.) Az erő arányos a töltéssel.
3.) Az erő arányos a sebességgel.

$$\boxed{\underline{F} = e\,(\underline{v} \times \underline{B})} \qquad [B] = [\frac{Ns}{Cb\,m}] = [\frac{VAs^2}{Cb\,m}] = [\frac{Vs}{m}]$$

$\underline{B}$ –t az áram hozza létre. Egyenes vezető tere:

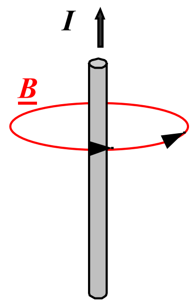


$$B = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I}{r}$$



$$\oiint \underline{B}\,d\underline{A} = 0!$$

A henger felszínére (nincs forrás)



$$\oint \underline{B}\,d\underline{s} \neq 0!$$

A hurokra

$$\oint \underline{B}\,d\underline{s} \sim I$$

Magnetosztatika egyenletei

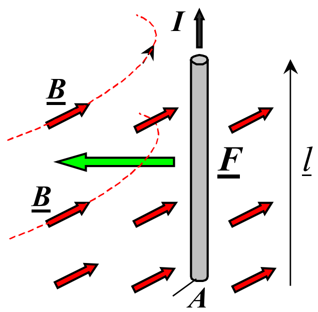
$$\oiint \underline{B}\, d\,\underline{A} = 0$$

$$\oint \underline{B}\, d\,\underline{s} = \mu_o I$$

Ampere törvény

$$(\mu_o = 1.256\ 10^{-6}\ \frac{Vs}{Am} = \frac{4\pi}{10^7}\frac{Vs}{Am})$$

Az áramvezetőre hatóerő:



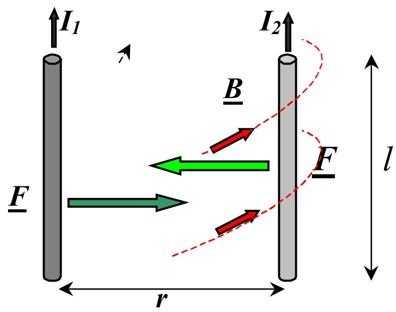
$$\underline{F} = N\, e(\underline{v} \times \underline{B}) \Rightarrow$$

$$F = \frac{N e \mathrm{v}}{A l} A l B = j A \ell B. = I \ell B$$

$$(j = n\, e\, \mathrm{v} = N/V\, e\, \mathrm{v}\ ;\ I = j\, A\ ;\ V = A\, l)$$

$$\boxed{\underline{F} = I\, (\underline{\ell} \times \underline{B})}$$

Párhuzamos áramok között hatóerő:



$$F = I\, l\, B = I_1\, l\, (\frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I_2}{r})$$

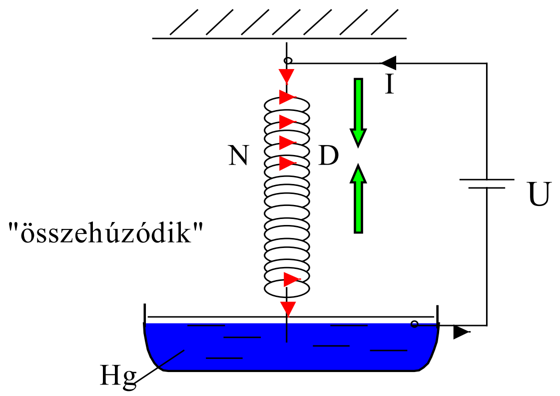
$$F = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r} l$$

($I_1 = I_2 = 1A$; r = 1m; ℓ = 1 m; F = 2 10^{-7} N)

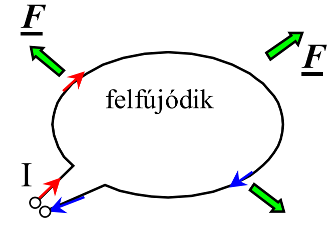
Az ***1 amper*** definíciója!

A *párhuzamos* áramok *vozzák* egymást, az *ellentétesek taszítják* egymást.

Rouget spiral



Rezgő spirál rugó.



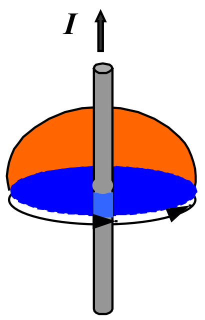
Az alapegyenletek:

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint \underline{B}\, d\underline{A} = 0}$$ **div $\underline{\mathbf{B}}$ = 0** *(egy egyenlet)*

$$\boxed{\oint \underline{B}\, d\underline{s} = \mu_o I}$$ **rot $\underline{\mathbf{B}}$ = $\mu_o \underline{\mathbf{j}}$** *(három egyenlet)*

, mert $\oint \underline{B}\, d\underline{s} = \iint rot\, \underline{B}\, d\underline{A} = \mu_o I = \mu_o \iint \underline{j}\, d\underline{A}$

Csak akkor helyes, ha a töltések áramlása stacionárius.



$\oint \underline{B}\, d\underline{s} = \mu_o \iint \underline{j}\, d\underline{A}$

(az áramátjárta egyik felületre)

u.i. : $0 = \oint\!\!\!\oint \underline{j}\, d\underline{A}$

(zárt felületre, ha $\partial\rho/\partial t = 0$!)

Kondenzátor feltöltésekor a töltéssűrűség időben nem állandó, ezért nem igaz a ***div $\underline{\mathbf{j}}$ = 0***!

(Helyette kontinuitási egyenlet kell) !

Biot-Savart törvény:

(Az áram tere (indukciója: B) is ~ $1/r^2$ –es távolságfüggést mutat)

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{I\, d\underline{s} \times \underline{r}}{r^3}}$$

A vektorpotenciál ($\underline{A}$)

Bevezetjük a mező jellemzésére a (nem skalár-, hanem) vektorpotenciált, melynek a (térbeli) deriváltja (rotációja és nem a gradiense) adja a teret.

$\underline{\mathbf{B}}$ = rot $\underline{\mathbf{A}}$; *feltétel (Coulomb: div $\underline{A}$ = 0)!*

rot rot $\underline{\mathbf{A}}$ = $\mu_o \underline{\mathbf{j}}$ azaz $\varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, \varepsilon_{klm}\, \partial_l A_m = \mu_o\, j_i$

$$\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{klm} = \delta_{il}\ \delta_{jm} - \delta_{im}\ \delta_{jl}$$

$$\partial_i\, \partial_m\, A_m - \partial_j\, \partial_j\, A_i = \mu_o\, j_i$$

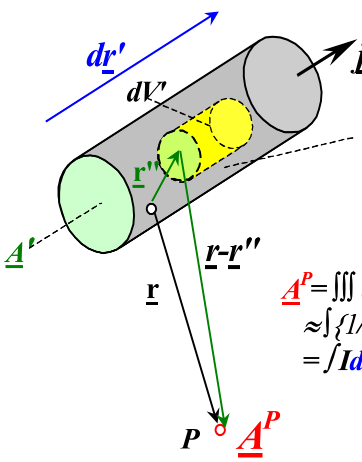
$$grad\ div\ \underline{A} - \Delta \underline{A} = \mu_o\, \underline{j}\,;$$

div $\underline{A}$ = 0 esetén: $$\Delta \underline{A} = -\,\mu_o\, \underline{j}$$

A vektorpotenciál és a skalárpotenciál összehasonlítása:

Vektorpotenciál	Skalárpotenciál
$\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A}$	$\underline{E} = -\,\mathrm{grad}\,\Phi$
$\mathrm{rot}\,\underline{B} = \mu_o\,\underline{j}$	$\mathrm{div}\,\underline{E} = \rho/\varepsilon_o$
$\mathrm{rot\,rot}\,\underline{A} = \mu_o\,\underline{j}$ $\mathrm{grad\,div}\,\underline{A} - \Delta\,\underline{A} = \mu_o\,\underline{j}$	$-\,\mathrm{div\,grad}\,\Phi = \rho/\varepsilon_o$
$\Delta\,\underline{A} = -\,\mu_o\,\underline{j}$	$\Delta\,\Phi = -\,\rho/\varepsilon_o$
$\underline{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\iiint\frac{\underline{j}(r')\,d^3r'}{\lvert\underline{r}-\underline{r}'\rvert}$	$\Phi = \int d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iiint\frac{\rho(r')\,d^3r'}{\lvert\underline{r}-\underline{r}'\rvert}$
$\underline{B} = rot\left\{\frac{\mu_o}{4\pi}\iiint\frac{\underline{j}(r')\,dr'\,df}{\lvert\underline{r}-\underline{r}'\rvert}\right\}$	$\underline{E} = -grad\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iiint\frac{\rho(r')\,d^3r'}{\lvert\underline{r}-\underline{r}'\rvert}\right\}$
$\underline{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\sum_i grad\frac{1}{\lvert\underline{r}-\underline{r}_i\rvert}\times I\,d\underline{s}_i$	$\underline{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_i Q_i\,grad\frac{1}{\lvert\underline{r}-\underline{r}_i\rvert}$

Speciális esteben, ha (vékony) drótban folyik az áram:
A drót ($A' = \iint dr''^2$) keresztmetszetére kiintegrálhatunk. Az A' felületen (a vezetékben mindenhol) I áram folyik. Az $\underline{A}'$ vektor iránya a vezeték aktuális iránya $d\underline{r}'$.



$$dV' = \underline{A}'\,d\underline{r}'$$
$$\underline{j}\,dV' = (\underline{j}\,\underline{A}')\,d\underline{r}' = I\,d\underline{r}'$$
$$(\underline{j}\,/\!/\,\underline{A}'\,/\!/\,d\underline{r}')$$

$$\underline{A}^P = \iiint d\underline{A}^P \sim \iiint \underline{j}\,dr'^3\,\{1/\lvert\underline{r}-\underline{r}'\rvert\} \approx$$
$$\approx \int\{1/\lvert\underline{r}-\underline{r}'\rvert\}\iint \underline{j}\,dr''^2\,dr' =$$
$$= \int I\,d\underline{r}'\,\{1/\lvert r-r'\rvert\}$$
$$(r'' << r,\ r';\ \text{és}\ \underline{j} = \text{áll.})$$

$$\underline{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\iiint\frac{\underline{j}(r')\,d^3r'}{\lvert\underline{r}-\underline{r}'\rvert} =$$
$$\underline{A} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int\frac{d\underline{r}'}{\lvert\underline{r}-\underline{r}'\rvert}$$
$$rot\,\underline{A} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int rot\left(\frac{1}{\lvert\underline{r}-\underline{r}'\rvert}\right)\times d\underline{r}'$$
$$rot\,(a\,\underline{b}) = a\,rot\,\underline{b} - \underline{b}\times grad\,a$$
$$\underline{\nabla}\times(a\,\underline{b}) = a(\underline{\nabla}\times\underline{b}) - (\underline{b}\times\underline{\nabla})\,a$$
$$rot\,\underline{A} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int\frac{-(\underline{r}-\underline{r}')\times d\underline{r}'}{\lvert\underline{r}-\underline{r}'\rvert^3}$$

Ezek után a Biot-Savart törvény:
Az infitezimális áramok (***I ds***) infitezimális tér járulékairól (indukciójáról: ***dB***) értelmes beszélni és azok szuperponálódnak. Az integrál:

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \int d\underline{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int\frac{I\,d\underline{r}'\times(\underline{r}-\underline{r}')}{\lvert\underline{r}-\underline{r}'\rvert^3}}$$

A Coulomb feltétel teljesülésének ellenőrzése:

$$div\,\underline{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\iiint div\,\frac{\underline{j}(r')\,d^3r'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{\mu_o}{4\pi}\iiint div_r\left(\frac{\underline{j}(r')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)d^3r' =$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi}\iiint grad_r\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)\underline{j}(r')\,d^3r' = \frac{\mu_o}{4\pi}\iiint grad_{r'}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)\underline{j}(r')\,d^3r' =$$

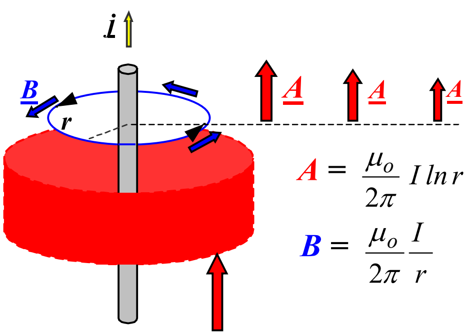
$$= \frac{\mu_o}{4\pi}\underbrace{\iiint - div_{r'}\left(\frac{\underline{j}(r')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)d^3r'}_{} + \frac{\mu_o}{4\pi}\underbrace{\iiint\left(\frac{div_{r'}\,\underline{j}(r')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)d^3r'}_{} = 0$$

(felületi integrál, távol: = 0; kont. egy.: = 0).

mert: $div(a\,\underline{b}) = a\,div\,\underline{b} + \underline{b}\;grad\,a$, azaz $\underline{\nabla}\,(a\,\underline{b}) = a(\underline{\nabla}\,\underline{b}) + (\underline{b}\,\underline{\nabla})a$ és

$a = \dfrac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$; $\underline{b} = \underline{j}(r')$, valamint $div_r\;\underline{j}(r') = 0$ és $div_{r'}\;\underline{j}(r') = 0$ a kontinuitási egyenlet miatt.

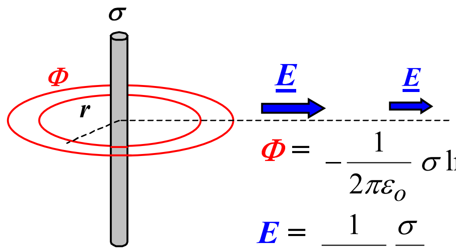
Egyenes áramvezeték vektorpotenciálja



$$A = \frac{\mu_o}{2\pi} I \ln r$$

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I}{r}$$

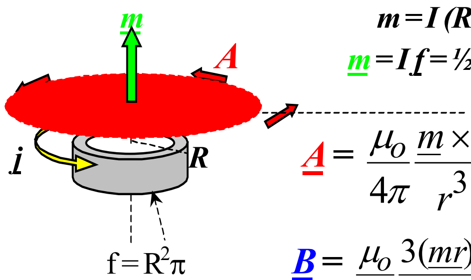
Egyenes töltött vezeték skalárpotenciálja



$$\Phi = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\sigma \ln r$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma}{r}$$

Körvezeték vektorpotenciálja *(tőle távol)*
(Mágneses momentum)



$$\boldsymbol{m = I\,(R^2\pi)}$$

$$\underline{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{I\,\underline{f}} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{I}\oint d\underline{\boldsymbol{s}} \times \underline{\boldsymbol{R}}$$

$$\underline{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\underline{m}\times\underline{r}}{r^3}$$

$$\underline{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{3(\underline{m}\underline{r})\underline{r} - \underline{m}r^2}{r^5}$$

(r >> R)

Dipólus skalárpotenciálja *(tőle távol)*
(Dipólmomentum)

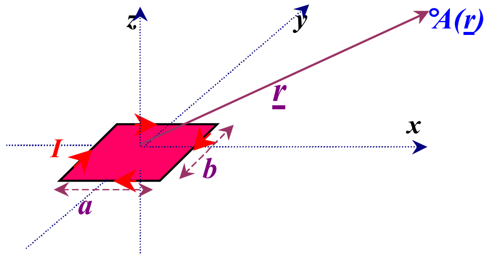
$$\underline{p} = e\,\underline{d}$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\underline{p}\,\underline{r}}{r^3}$$

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3(\underline{p}\underline{r})\underline{r} - \underline{p}r^2}{r^5}$$

(r >> d)

Áramhurok tere és vektorpotenciálja



$$\underline{A}=\frac{\mu_o}{4\pi}\iiint\frac{\underline{j}(r')\,d^3r'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$A_x(r)=\int_{-a/2}^{a/2}\frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-b/2)^2+z^2}}+\int_{a/2}^{-a/2}\frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2+(y+b/2)^2+z^2}}=$$

$$=\int_{-a/2}^{a/2}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-b/2)^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y+b/2)^2+z^2}}\right\}dx'$$

x'<<x miatt az integrál a-val arányos.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+b/2)^2+z^2}}\cong\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{2y(b/2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{r}-(b/2)\frac{y}{r^3}$$

miatt az integrál b-vel arányos.

$A_x(r)=\frac{\mu_o I}{4\pi}(ab)\frac{y}{r^3}=\frac{\mu_o}{4\pi}m\frac{y}{r^3}$, ahol $\boldsymbol{m}$ a mágneses momentum. $\underline{\boldsymbol{m}}$ = I $\underline{\boldsymbol{f}}$

f- az áramhurok felülete: = ***ab***

$$A_y(r)=-\frac{\mu_o}{4\pi}m\frac{x}{r^3};\ A_z(r)=0 \qquad \underline{A}=\frac{\mu_O}{4\pi}\frac{\underline{m}\times\underline{r}}{r^3}$$

$$B_x(r)=\partial_y A_z-\partial_z A_y=-\frac{\mu_o}{4\pi}m\frac{3xz}{r^5}$$

$$B_y(r)=\partial_z A_x-\partial_x A_z=-\frac{\mu_o}{4\pi}m\frac{3xy}{r^5}$$

$$B_z(r)=\partial_x A_y-\partial_y A_x=\frac{\mu_o}{4\pi}m\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\right)=$$

$$=\frac{\mu_o}{4\pi}m\left(-\frac{2}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2)}{r^5}\right)=\frac{\mu_o}{4\pi}m\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)$$

(hiszen $x^2+y^2=r^2-z^2$)

$$\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}=\frac{\mu_0}{4\pi}\begin{pmatrix}0 & -\frac{3xz}{r^5}\\ 0 & -\frac{3yz}{r^5}\\ \frac{1}{r^3} & -\frac{3z^2}{r^5}\end{pmatrix}$$

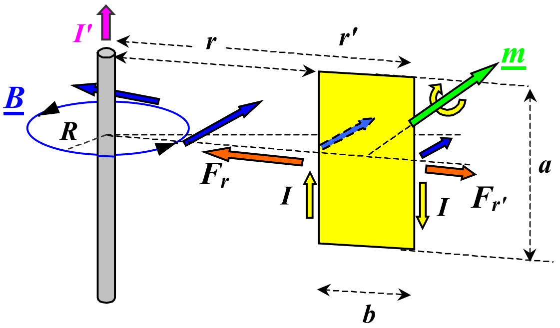
Mágneses momentumra ható erő

$$\underline{F}^{mágn.} = \underline{m}\ grad\ \underline{B}$$

Dipólus momentumra ható erő (külső térben)

$$\underline{F}^{dipól} = -e\,\underline{E}(\underline{r}) + e\,\underline{E}(\underline{r}+\underline{l}) \approx$$
$$\approx -e\,\underline{E}(\underline{r}) + \left(e\,\underline{E}(\underline{r}) + \{grad\ \underline{E}(r)\}\underline{l}\right) =$$
$$= \underline{p}\ grad\ \underline{E}$$

Áramhurokra ható erő



m = I ab

$$\boldsymbol{\underline{m} = I\,\underline{f}}$$

$$\boldsymbol{F_{\square} = F(r) - F(r') = \{B(r)-B(r')\}[I\,a] \cong}$$

$$\cong \left\{\left(-\frac{\partial B}{\partial r}\right)(r'-r)\right\}[I\,a] = (-\,grad\ B)(Ia\,b) = (-\,grad\ B)m = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I'\,I\,ab}{r^2}$$

$$\boldsymbol{\underline{F} = \underline{m}\ grad\ \underline{B}}$$ ***(a, b << r, r'!)***

($F_x = \{m_x\,(\partial B_x/\partial x) + m_y\,(\partial B_y/\partial x) + m_z\,(\partial B_z/\partial x)\}$,
$F_y = \{m_x\,(\partial B_x/\partial y) + m_y\,(\partial B_y/\partial y) + m_z\,(\partial B_z/\partial y)\}$,
$F_z = \{m_x\,(\partial B_x/\partial z) + \ldots\}\ldots$).

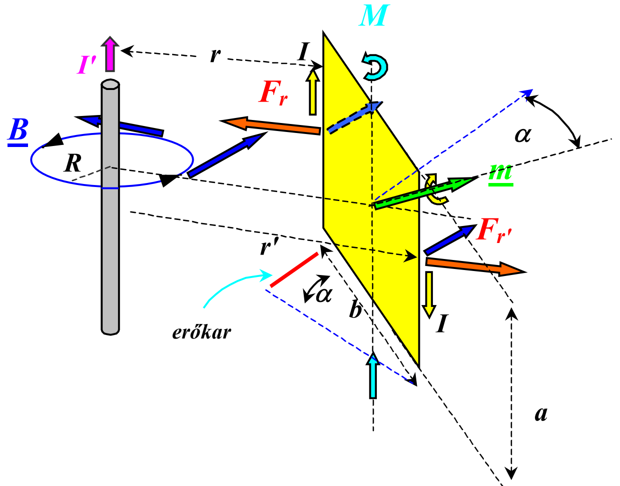
Mágn. momentumra ható M forg. nyomaték

$$\underline{M}^{mágn.} = \underline{m} \times \underline{B}$$

Dipól momentumra ható M forg.nyomaték

$$\underline{M}^{dip} = \underline{p} \times \underline{E}$$

Áramhurokra ható M forgatónyomaték



m = I ab

$$\boldsymbol{\underline{m} = I\,\underline{f}}$$

$$\boldsymbol{\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}}$$

$$\boldsymbol{M_{\square} = (F(r)+F(r'))\,(\tfrac{1}{2})(b\sin\alpha) = (\tfrac{1}{2})\{B(r)+B(r')\}[I\,a](b\sin\alpha) \cong}$$

$$\cong \{B(r)\}[I\,a]\,b\sin\alpha = B(Ia\,b)\sin\alpha = m\,B\sin\alpha = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I'\,I\,ab}{r}\sin\alpha$$

$$\boldsymbol{\underline{M} = \underline{m} \times \underline{B}}$$ ***(a, b << r, r'!)***