ELTE I.Fizikus 2004/2005 II.félév

KISÉRLETI FIZIKA

Elektrodinamika

2. (II. 22-25.)

A potenciál, feszültség $U(\underline{r})$, $\Phi(\underline{r})$ (skalár- vektor függvény):

Gravitációs tér ⇒ potenciális energia

Itt is potenciális energia $U_p(\underline{r})$

$e\,\Phi(\underline{r}) = U_p(\underline{r})$ egysége: $[\Phi] = \underbrace{[E][r]}_{[V/m][m]} = Volt = [V]$

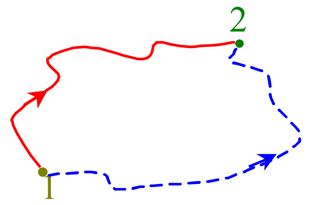
$$\underline{F} = -\,grad\,U_p(\underline{r}) \qquad \underline{E} = -\,grad\,\Phi(\underline{r})$$

$$\int_1^2 \underline{E}\,d\underline{s} = -\int_1^2 grad\Phi\,d\underline{s} = -(\Phi_2 - \Phi_1) = (\Phi_1 - \Phi_2)$$

$$\oint \underline{E}\;d\underline{s} = (\Phi_1 - \Phi_1) = 0$$

egyenértékű *a potenciál* létezésével*!*

(t.i. térbeli ponthoz rendelt a Φ, hiszen útvonalfüggetlen a differencia)



$$div\,\underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \;; \qquad -\,div\,grad\,\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_o};$$

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}\;;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}\;;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial r_i \partial r_i} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

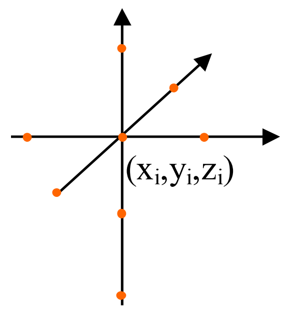
Poisson egyenlet

Matematikája kidolgozott.

Számítógéppel:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi(x_{i+1}, y_i, z_i) + \Phi(x_{i+2}, y_i, z_i) - 2\Phi(x_i, y_i, z_i)}{2a^2}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi(x_{i+1}, y_i, z_i) + \Phi(x_{i-1}, y_i, z_i) - 2\Phi(x_i, y_i, z_i)}{2a^2}$$



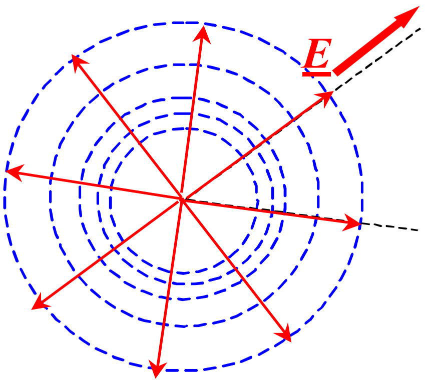
$$\frac{3}{a^2}\left[\frac{\Phi(x_{i+1},y_i,z_i)+\Phi(x_{i-1},y_i,z_i)+\Phi(x_i,y_{i+1},z_i)}{6}\right]+\dots$$

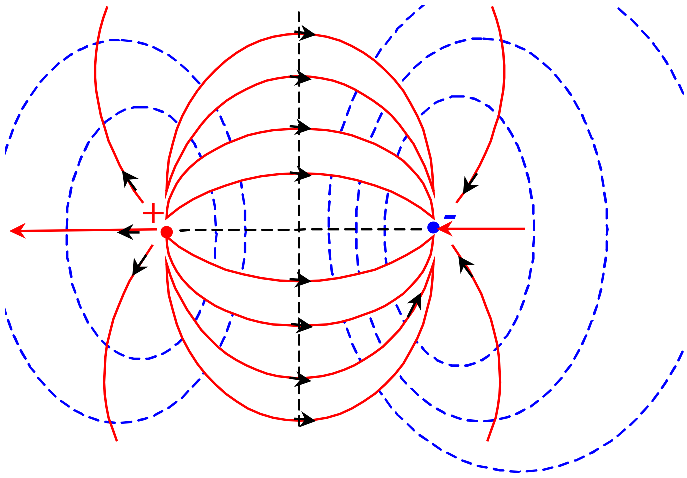
$$\dots+\frac{3}{a^2}\left[\frac{\Phi(x_{i+1},y_i,z_i)+\Phi(x_{i-1},y_i,z_i)+\Phi(x_i,y_{i+1},z_i)}{6}-\Phi(x_i,y_i,z_i)\right]=-\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$\frac{3}{a^2}\left[\overline{\Phi(x_i,y_i,z_i)}-\Phi(x_i,y_i,z_i)\right]=-\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

<u>Potenciál ábrázolása</u>

Φ(r̲) = *állandó* szintvonalak
3 D(imenzió) felületek (*Ekvipotenciális felületek*
2 D szintvonalak



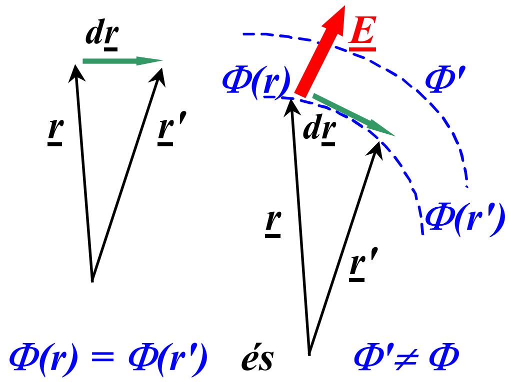


A szintvonalak és a térerősség egymásra merőlegesek (⊥).

Φ(r̲ +dr̲) - Φ(r̲) = 0
(dr̲ a szintvonalon)

$$grad\ \Phi(\underline{r})\,d\underline{r}=0$$

$$-\underline{E}\,d\underline{r}=0$$



Töltéseloszlások:

-Diszkrét töltések (pont, 0 Dim.)

Térerősségek szuperpoziciója $\Rightarrow$

Potenciálok szuperpoziciója:

$$\boldsymbol{\Phi(\underline{r})} \;=\; \sum_i \Delta\Phi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_i \frac{q_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|}$$

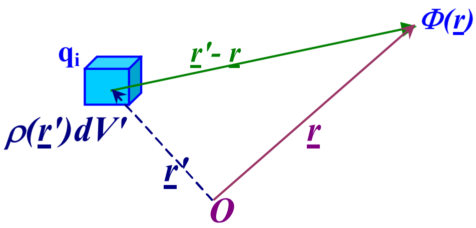
-Térfogati töltéseloszlás (3 Dim.)

töltéssűrűség:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{dQ}{dV}$$

$q_i = \rho\, dV'$; $\underline{r}_i = \underline{r}'$

$$\Phi(\underline{r}) \;=\; \int d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iiint \frac{\rho\, dV'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$



$(dV' = d\, r'^3)$

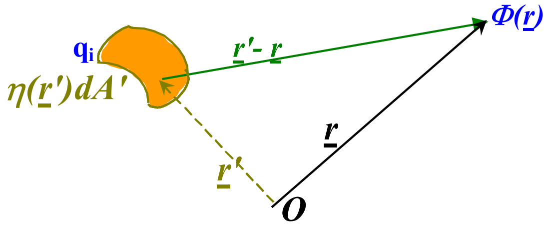
-Felületi töltéseloszlás (2 Dim.)

felületi töltéssűrűség:

$$\eta = \frac{Q}{A} = \frac{dQ}{dA}$$

$q_i = \eta\, dA'$; $\underline{r}_i = \underline{r}'$

$$\Phi(\underline{r}) \;=\; \int d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iint \frac{\eta\, dA'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$



$(dA' = d\, r'^2)$

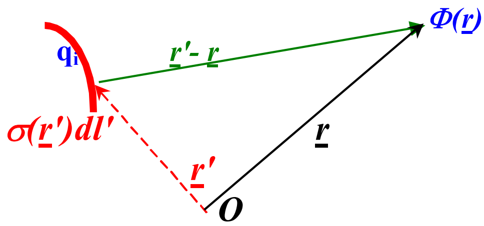
-Vonalmenti töltéseloszlás (1 Dim.)

vonalmenti töltéssűrűség:

$$\sigma = \frac{Q}{l} = \frac{dQ}{dl}$$

$q_i = \sigma\, dl'$; $\underline{r}_i = \underline{r}'$

$$\Phi(\underline{r}) \;=\; \int d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int \frac{\sigma\, dl'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$



$(dl' = d\, r')$

Speciális (pont) töltéselrendeződések:

1.) Monopólus

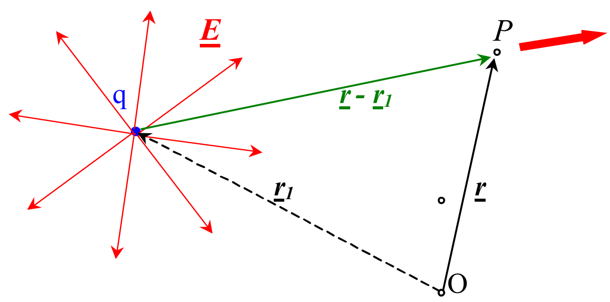
Egy töltés önmagában.

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{|\underline{r}-\underline{r}_1|^3}(\underline{r}-\underline{r}_1)$$

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{|\underline{r}-\underline{r}_1|}$$

Pl. : origóban ($r_1 = 0$).

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}$$



2.) Dipólus *(töltéspár)*

Azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltések párban (semleges; $\Sigma\, q_i = 0$), egymástól l távolságban.

$$\Phi^{dip}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{r}+\frac{-q}{|\underline{r}+\underline{l}|}\right)=$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{r}-\left[\frac{q}{r}-\frac{q}{r^3}\underline{r}\,\underline{l}\right]\right)= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\underline{p}\,\underline{r}}{r^3}\right)$$

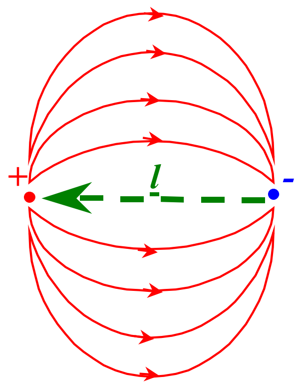
$$\Phi^{d}(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^2}$$

(ahol $\underline{p}= \lim q\, \underline{l}$)

***p** a dipól momentum*

$$\underline{E}^{d}(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\underline{p}}{r^3}-\frac{3(\underline{p}\,\underline{r})\underline{r}}{r^5}\right)$$

$$\underline{E}^{d}(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^3}$$



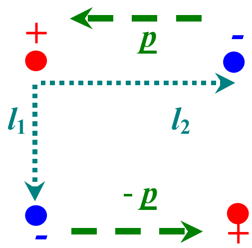
3.) Kvadrupólus *(négy töltés)*

Azonos nagyságú, de ellentétes előjelű dipólusok párban (semlegesek $\Sigma q_i = 0$, és a nincs eredő dipól sem $\Sigma \underline{p}_i = 0$).

$$\Phi^{q}(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^3}\,;\ \underline{E}^{q}(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^4}$$

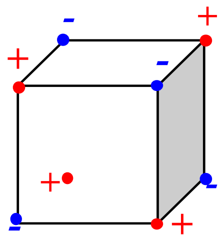
Az elnemtűnő potenciáljárulék arányos a Q kvadrupól momentummal (tenzor):

$$Q_{i,j} = q\,[\,(\underline{l}_1)_i\,(\underline{l}_2)_j+(\underline{l}_1)_i\,(\underline{l}_2)_j\,]$$



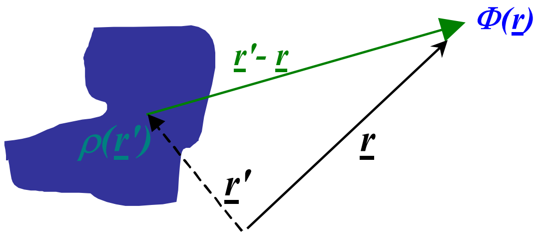
4.) *Oktupolok* *(nyolc töltés)* ***és multipólok***
Nyolc szimmetrikus "kioltó" töltés a kocka csúcsaiban, amelyeknek még a Q kvadrupólmomentuma is 0.

$$\Phi^{oct}(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^4};\ \underline{E}^{oct}(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^5}$$



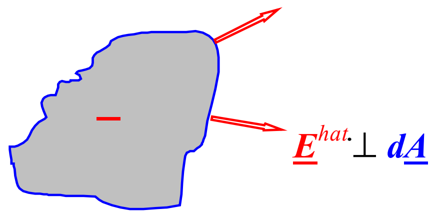
Tétel (multipólok):
Térfogati töltéseloszlás helyettesítése ponttöltésekkel, tőle távol.

ρ(r')= monopol+ dipol+ kvadrupol+ oktupol +….



Elektrosztatika és anyagok
1.) Vezetők
Vezetőkben a töltések szabadon elmozdulhatnak.
Fémek : ionok (+) és szabadelektronok (-).
Szupravezetők (fémek és kerámiák.
Ionos vezetők: a) elektrolitok
b) szuperionos vezetők (Ag I).

Veztőn belül nincs térerősség ($\underline{E}^{belül} = 0$).
Vezető határán csak a felületre ($d\underline{A}$) *merőleges* (normális) komponens van ($\underline{E}^{hat} \perp d\underline{A}$), mert az érintő irányú (||) *(tangenciális)* komponens eltűnik ($E_{||}^{hat} = 0$).



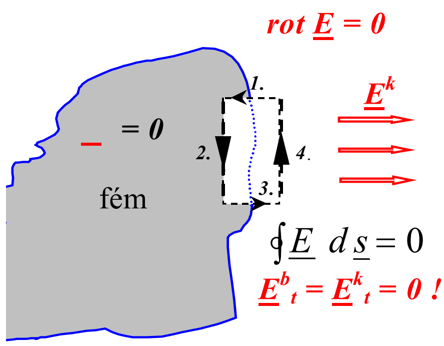
⇒ *A vezető ekvipotenciális felület!*

$$\oint \underline{E}\, d\underline{s} = -\int_1 E_{mer.}\, dm - \int_2 E_{tang.}^{belső}\, dt + .$$

$$.+ \int_3 E_{mer.} dm + \int_4 E_{tang.}^{belső}\, dt \cong$$

$$-\int_2 E_{t.}^{b.}\, dt + \int_4 E_{t.}^{k.}\, dt = 0 \ \Rightarrow$$

$$-E_{t.}^{b.}\, l + E_{t.}^{k.}\, l = 0$$



1.1) A kapacitás fogalma, kondenzátor

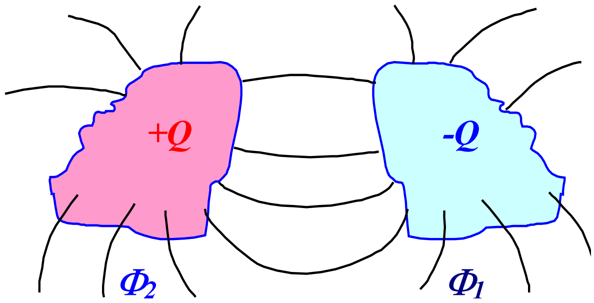
$$\Phi_2 - \Phi_1 \sim Q$$

(a szuperpozició elve !)

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{1}{C} Q$$

***C** (a kapacitás)* az erővonalak **geometriá**jának jellemzője.

$$(\Phi_2 - \Phi_1) = \int_1^2 \underline{E}\, d\underline{s}$$

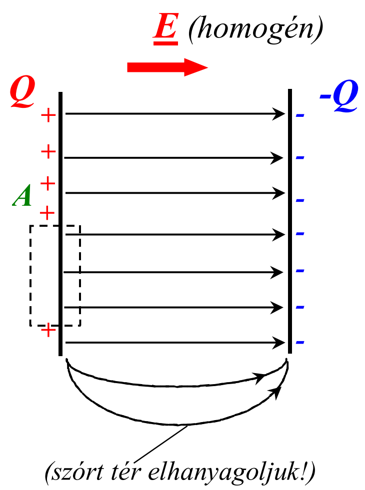


$$\Phi \sim \frac{1}{r}; \qquad \Delta\Phi \sim \frac{1}{C} \Rightarrow \mathbf{C} \sim r \text{ (hosszjellemző)}$$

$$[C] = [\frac{Cb}{V}] = [\frac{As}{V}] = [Farad]$$

Síkkondenzátor

(az erővonalak a (sík) fegyverzetek közé kondenzálódnak, sűrűsödnek)



$$\oiint \underline{E}\, d\underline{A} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$E\,A = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{\varepsilon_o A}$$

$$(\Phi_2 - \Phi_1) = \int_1^2 \underline{E}\, d\underline{s} = Ed = \frac{Q\,d}{\varepsilon_o A}$$

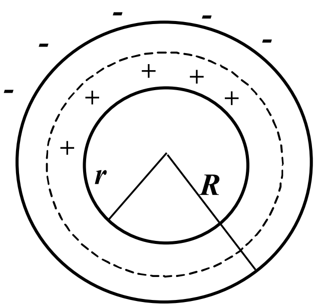
$$C_{sík\,k.} = \frac{\varepsilon_o A}{d}$$

Széthúzással a ***d*** nő:

A) Q = áll. Φ nő (gépek) ;

B) Φ = áll. Q nő.

Gömbkondenzátor



$$\oint\!\!\oint \underline{E}\, d\,\underline{A} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$E\,A = E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\, r^2}$$

$$(\Phi_R - \Phi_r) = \Delta\Phi = \int_r^R E(r')\,dr' =$$

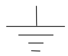
$$= \int_r^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\, r'^2}\,dr' = \left|\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_o\, r'}\right|_r^R$$

$$C_{gömb\,k.} = 4\pi\varepsilon_O \frac{R\,r}{R-r}$$

Beszélhetünk a gömb (r) kapacitásáról ($R \to \infty$):

$$C = 4\pi\varepsilon_O\, r$$

$$C_{föld} = 4\pi\varepsilon_o\, R_{föld} = 0.707\,\mu F$$

A föld kapacitása nagy, sok töltést felvesz anélkül, hogy a feszültsége változna!
Így a föld stabil feszültségű, ami a földelés  egyik lényeges tulajdonsága.

1.2 A kondenzátor energiája

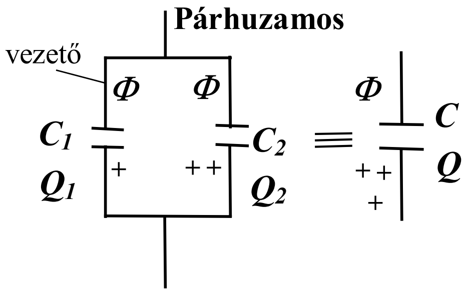
Feltöltődik: $Q = \Phi\, C$

$$E^{kond.}_{energ.} = \int \Phi\, dq = \int_0^Q \Phi(q')\,dq' = \int_0^Q \frac{q'}{C}\,dq' = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2$$

$$E^{kond.}_{energ.} = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2 = \frac{1}{2}\Phi\, Q = \frac{1}{2}C\,\Phi^2$$

1.3 Kondenzátorok összekapcsolása

a) Párhuzamos kapcsolás:



Ekvipotenciális (vezeték) és additív töltés.

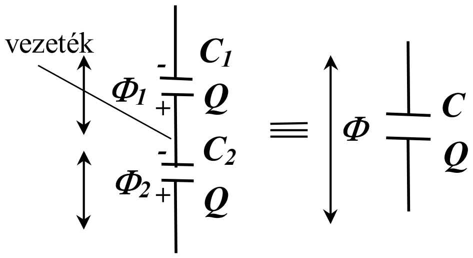
$$Q_1 = C_1\,\Phi;\; Q_2 = C_2\,\Phi;\; Q = C\Phi$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)\Phi = C\,\Phi$$

$$C = (C_1 + C_2)$$

b) Soros kapcsolás:

Soros



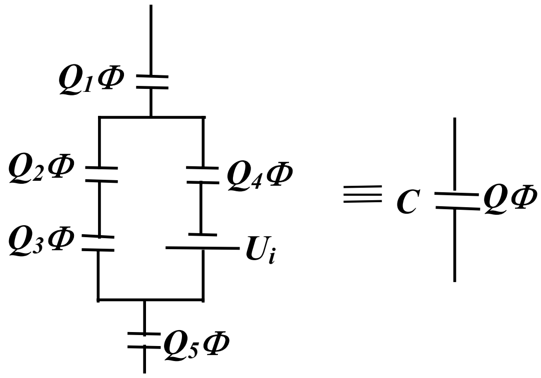
Megosztás (vezeték) és additív potenciál.

$$Q = C_1\,\Phi_1\,;Q = C_2\,\Phi_2\,;Q = C\Phi$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}\right)Q = \frac{1}{C}\Phi$$

$$\frac{1}{C} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

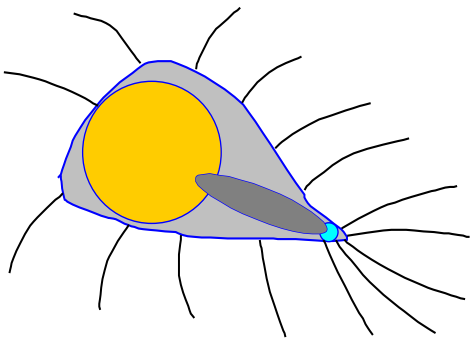
c) Bonyolultabb kacsolások:

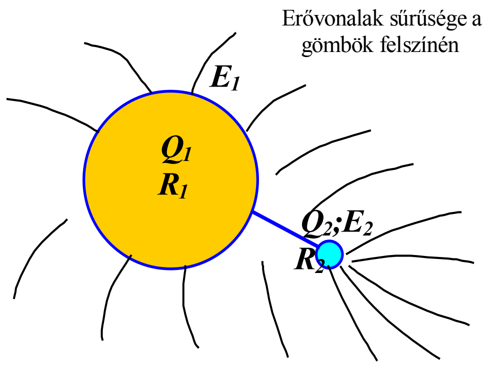


$$Q_i = C_i\,\Phi_i\,;\,Q = \sum Q_i\;;$$

$$U_i = \sum \Phi_i$$

1.4) Csúcshatás





$C_1 = 4\pi\varepsilon_o\,R_1\;;\;C_2 = 4\pi\varepsilon_o R_2$ (R_1, R_2 gömbök párhuzamos kapcsolása) $\Rightarrow$

$\Phi = \Phi_1 = \Phi_2\,;\qquad C = C_1 + C_2\,;\qquad Q = Q_1 + Q_2\,;$

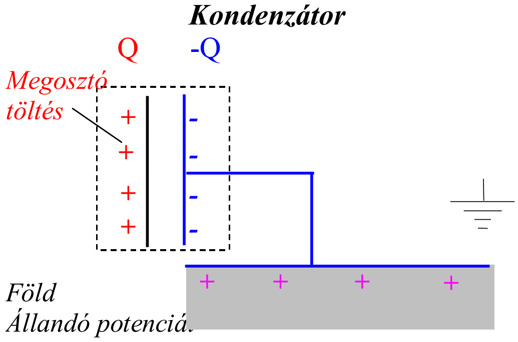
$$Q_1 = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)Q\,;Q_2 = \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)Q \Rightarrow Q_1 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)Q\,;Q_2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)Q$$

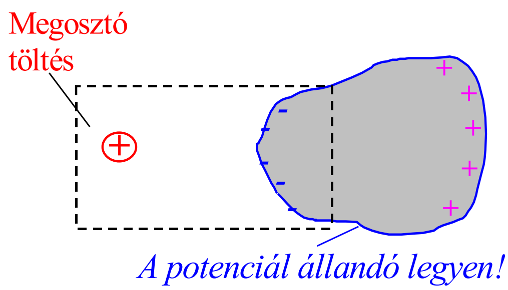
$$E_1^{g.felsz.} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o\,R_1^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\,R_1(R_1 + R_2)}\;;\;E_2^{g.felsz.} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o\,R_2^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\,R_2(R_1 + R_2)}$$

$$E_1 R_1 = E_2\,R_2$$

Kis görbületi sugár $\Rightarrow$ nagy térerő *(a tűhegynél szikrázás).*

1.5) Megosztás





A kondenzátorban is semleges a *(megosztó)* töltés és a megosztott töltés együttesen.

(Az erővonalak egy szűk térrészben sűrűsödnek.)