ELTE I.Fizikus 2004/2005 II.félév

KISÉRLETI FIZIKA

Elektrodinamika

13. (IV.29 -V.3.)

<u>Interferencia</u> II.

A komplex leírás:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\right];\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2} = \mathrm{Im}\left[e^{i\varphi}\right];$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\ ;\ e^{i\varphi^*} = e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$e^{i\varphi}\ e^{i\varphi^*} = 1\ ;\ \cos\varphi = \mathrm{Re}\left[e^{-i\varphi}\right]$$

$$f_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1);\ f_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$f_1\,f_2 = A_1\,A_2\cos(\omega t+\varphi_1)\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$\cos(\omega t+\varphi_1)\cos(\omega t+\varphi_2) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t+\varphi_1+\varphi_2)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2) = \mathrm{Re}\left[e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}\right] = \mathrm{Re}\left[e^{i\varphi_1}\,e^{-i\varphi_2}\right] = \mathrm{Re}\left[e^{i\varphi_1}\,e^{i\varphi_2^{\ *}}\right]$$

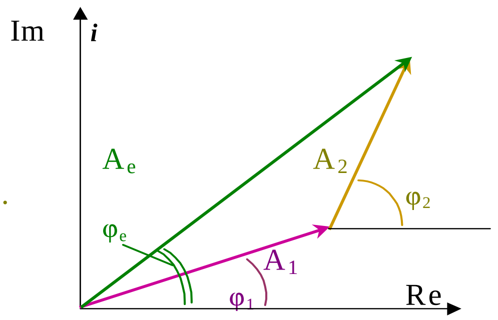
Időbeli átlagoláskor:

$$\overline{f_1\,f_2} = \frac{1}{2}\{\,A_1\,A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\}$$

$$\boldsymbol{F}_1 = A_1\,e^{i(\omega t+\varphi_1)}\ ;\ \boldsymbol{F}_2 = A_2\,e^{i(\omega t+\varphi_2)}$$

$$\mathrm{F}_1\,\mathrm{F}_2 = A_1\,A_2\,e^{i(2\omega t+\varphi_1+\varphi_2)}\ ;\ \mathrm{F}_1\,\mathrm{F}_2^{\ *} = A_1\,A_2\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$\overline{f_1\,f_2} = \frac{1}{2}\{\,A_1\,A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\} = \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2^{\ *}}{2}\right]$$



$$\boldsymbol{A_e\,e^{i\varphi e} = A_1\,e^{i\varphi 1} + A_2\,e^{i\varphi 2}}$$

$$\boldsymbol{A_e^{\,2} = A_e\,A_e^{\,*} =}$$

$$\boldsymbol{=(A_1\,e^{i\varphi 1} + A_2\,e^{i\varphi 2})\ (A_1\,e^{-i\varphi 1} + A_2\,e^{-i\varphi 2}) =}$$

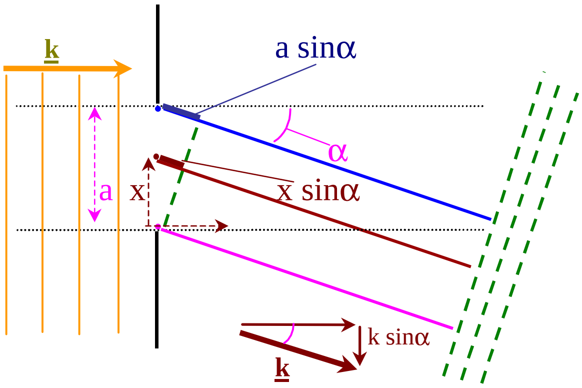
$$\boldsymbol{= A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + A_1 A_2(e^{i(\varphi 1-\varphi 2)} + e^{-i(\varphi 1-\varphi 2)}) =}$$

$$\boldsymbol{= A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1 A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\boldsymbol{\Delta\varphi_{\text{fáziskülönbség}} = \Delta kL = k_o\,\Delta nL = (2\pi/\lambda_o)\ \Delta ns}$$

$$\boldsymbol{I_e = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\,\sqrt{I_2}\cos[(2\pi/\lambda_o)\ \Delta ns\,]}$$

Kétdimenziós rács (elhajlás)



A rés egy közbenső x pontjában az áteresztés:

- $\tau(x) = 1$, ha átenged,
- $\tau(x) = 0$, ha nem enged át.

A $\varphi(x)$ fázisszög is helyfüggő:

$$\varphi = (2\pi/\lambda_o)\, x \sin\alpha = k_x\, x$$

$$k_x = (2\pi/\lambda_o) \sin\alpha = k$$

(A folytonos leírást megtartjuk. Később lehet majd féligáteresztést is kezelni: τ(x) = 0.5).

$$A = \int \tau(x)\, e^{i\,\varphi(x)}\, dx = \int \tau(x)\, e^{i\,k_x x}\, dx$$

komplex amplitudó

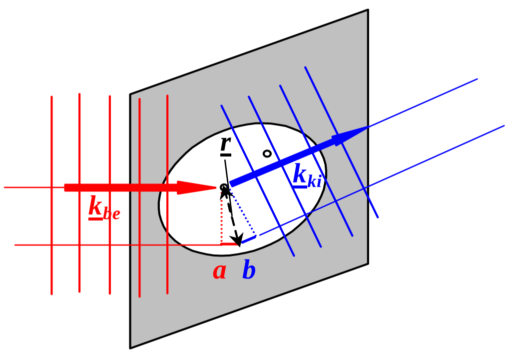
Intenzitás $I \sim |A|^2$

$$A = \int_0^d e^{ikx} dx = \left.\frac{e^{ikx}}{ik}\right|_0^d = \frac{e^{ikd}-1}{ik}$$

$$A^2 = \frac{e^{ikd}-1}{ik}\,\frac{e^{-ikd}-1}{-ik} = \frac{1-e^{ikd}-e^{-ikd}+1}{k^2}$$

$$A^2 = 2\frac{1-\cos kd}{k^2} = 4\frac{\sin^2(kd/2)}{k^2} = d^2\frac{\sin^2(kd/2)}{(kd/2)^2} = d^2\frac{\sin^2(\pi d\sin\alpha/\lambda)}{(\pi d\sin\alpha/\lambda)^2}$$

Három dimenzióban:



$|\underline{k}_{be}| = |\underline{k}_{be}| = k$

$a = \underline{k}_{be}\, \underline{r} / k$, $b = \underline{k}_{ki}\, \underline{r} / k$

$\Delta s = a + b = (\underline{k}_{be} - \underline{k}_{ki})\, \underline{r} / k$

$\Delta s = (\lambda/2\pi)\, (\underline{k}_{be} - \underline{k}_{ki})\, \underline{r}$

$\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)\, \Delta s = (\underline{k}_{be} - \underline{k}_{ki})\, \underline{r}$

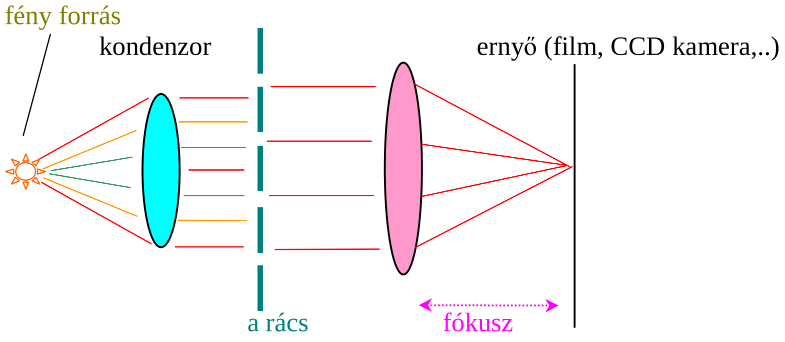
$$A = \int \tau(\underline{r})\, e^{i\,\varphi(\underline{r})}\, d^3r =$$

$$A = \int \tau(\underline{r})\, e^{i\,(\underline{k}_{be} - \underline{k}_{ki})\,\underline{r}}\, dV$$

szóráserősség

Interferenciák (alkalmazása)

a) Optikai rács



Fókuszban:
az elhajlási kép

Spektrálisan analizáljuk a fényforrást.

Emissziós ill. abszorbciós spektrum.

Látható, UV, infravörös.

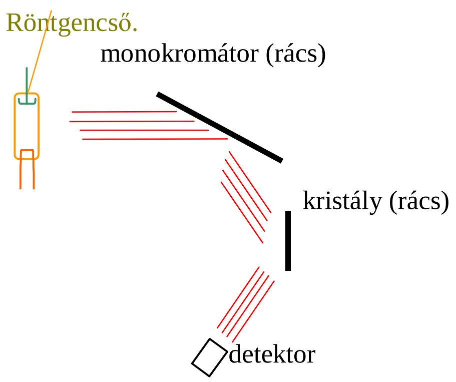
Leképezési törvény: $\mathbf{1/f = 1/k + 1/t}$

Fraunhoffer féle párhuzamos sugarakat $t = \infty$; a lencse végesbe (a fókuszba) képezi le: $k = f$.

b) Röntgendiffrakció

Az anyag szerkezetéről ad információt

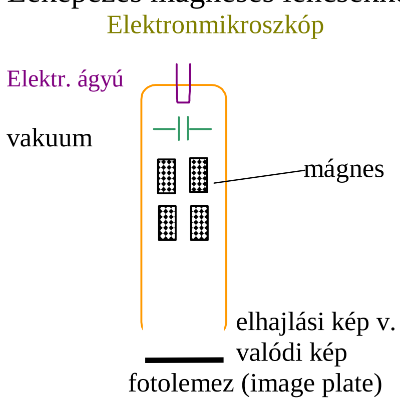
Kristály $\equiv$ elhajlási rács



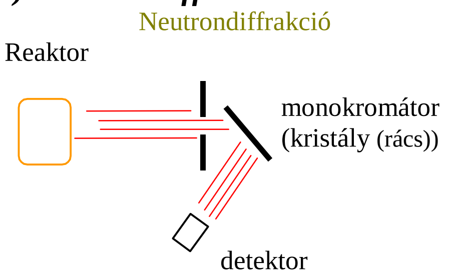
Nincs fénytörés (röntgenlecse) és nagyon piciny a rácsállandó (atomi méretű).
(A reflexió a meghatározó (és nem a transzmisszió).
A beesési szögek nagyon nagyok, azaz súrlódó beesések vannak.)

c) Elektrondiffrakció

Leképezés mágneses lencsékkel.



d) Neutrondiffrakció



Ugyanaz, mint a röntgendiffrakció, csak méteres méretekben.

II. Gömbhullámok

Fresnel problémák

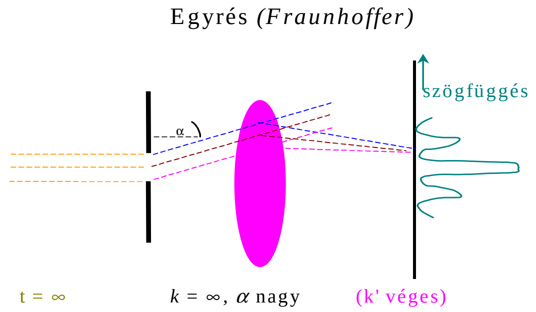
Nem korrekt a síkhullám közelítés, ha a tárgy vagy a kép nem végtelen távol van. Ekkor gömbhullámokkal kell leírni a jelenségeket, az irányok mellett a távolságok is lényegesek. Ez a leírás emiatt jóval bonyolultabb, hiszen több paraméter szükséges a jellemzéshez.

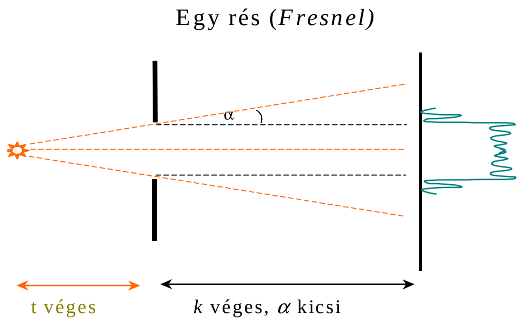
A végtelen Fraunhoffer probléma kisérletileg megvalósítható, ha a végtelenben levő képet egy lencsével a végesben képezzük le.

Fraunhoffer elhajlás
Párhuzamosak a sugarak (síkhullám)
A diffrakció képtávolsága (k) végtelen, , de α nem kicsi!.
/A kép a lencsével a végesbe leképezhető!/

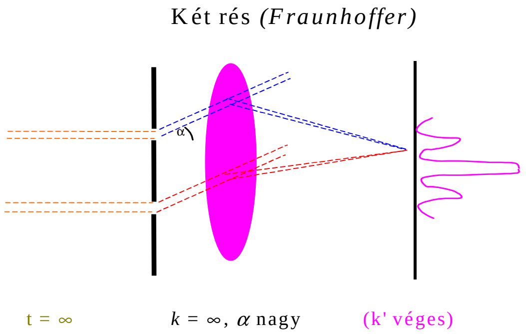
Fresnel elhajlás
Nem párhuzamos sugarak (gömbhullám)
A képtávolság (k) véges, α kicsi

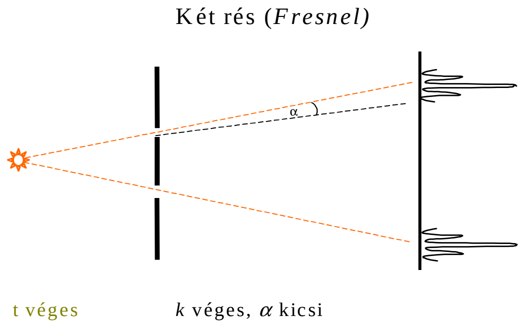
α) Egyrés





β) Két rés

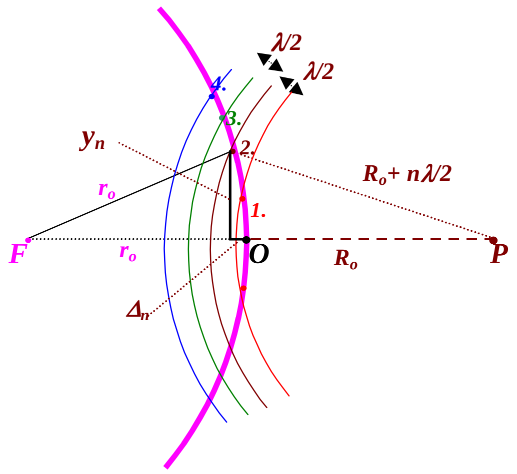




Fresnel(1818)

Huygens elv javítása (nem burkoló), hanem interferáló gömbhullámok összege az eredő.

Az egyszerűség kedvéért a F forrás és a P megfigyelő közötti α szögeltérés legyen nagyon kicsiny. Az ábrán $\lambda/2$ hullámhosszal növelve a Fresnel zónákat kimetsző gömb sugarait ($r_n = R_o + n\,\lambda/2$), jelöljük y_n -nel a Fresnel zóna sugarát. E zóna O ponttól mért távolsága Δ_n.



Ezekkel a jelölésekkel:
(kétszer felírva a Pitagorasz tételt)

$$r_o^2 = (r_o - \Delta_n)^2 + y_n^2$$

$$(R_o + n\,\lambda/2)^2 = (R_o + \Delta_n)^2 + y_n^2$$

$$y_n^2 = 2\,(r_o\,\Delta_n) = 2\,R_o\,(n\,\lambda/2 - \Delta_n)$$

$$y_n^2 = \frac{n\lambda}{\frac{1}{r_o} + \frac{1}{R_o}}$$

(a másodrendűen piciny: Δ_n^2 és $(n\,\lambda/2)^2$ tagok elhanyagolásával)
Az egyes zónák területe (járuléka) ugyanaz:

$$T_n = \pi(\,y_n^2 - y_{n-1}^2\,) = \frac{\lambda}{\frac{1}{r_o} + \frac{1}{R_o}}$$

Valójában az egyes zónák járuléka csak elsőrendben azonos, /mert pl. a zóna normálisa elfordul/, másodrendig pontosan számolva is egy picit csökken a járulék. ($T_n < T_{n-1}$)
Legyen a csökkenés mértani sorozat szerinti (kvóciense q):

$T_n = q\,T_{n-1}$ (ahol $q < \cong 1$, $q \Rightarrow 1$) a T_n helyett a_n amplitudó jelöléssel:

(Az eredő A amplitudó, az egyes zónák a_n amplitúdóinak fázishelyes összege (interferenciája)):

α) $\quad A = a - aq + aq^2 - aq^3 + aq^4 - aq^5 + \ldots + aq^n = a\,(1-q+q^2-q^3+\ldots) \cong a/(1+q)$

$\Rightarrow \quad A = a/2$ ($q \cong 1$ miatt) ; $\qquad \Rightarrow \quad I = A^2 = a^2/4$

β) Ha letakarjuk az első zónát:

$A = \quad - aq + aq^2 - aq^3 + aq^4 - aq^5 + \ldots + aq^n = -aq\,(1-q+q^2-q^3+\ldots) \cong -aq/(1+q)$

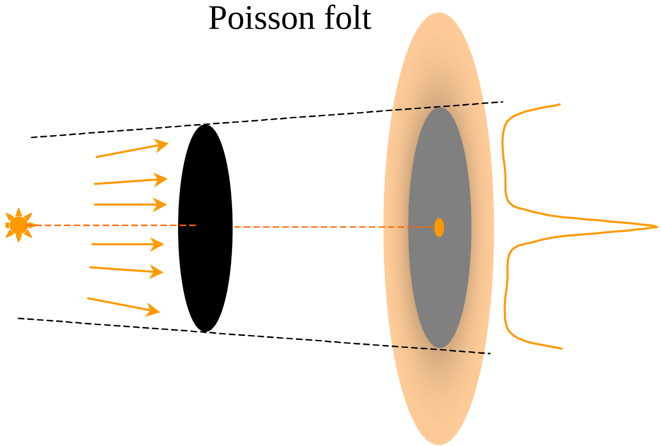
$A = -a/2\ ; \qquad \Rightarrow \qquad I = A^2 = a^2/4$

γ) Ha letakarjuk az ***első néhány*** zónát, a többit átengedjük (pl.: n >4):

$A = aq^4 - aq^5 + aq^6 - aq^7 + aq^8 - aq^9 + \ldots + aq^n = aq^4\,(1-q+q^2-q^3+\ldots) \cong aq^4/(1+q)$

$A \cong a/2\ ; \qquad \Rightarrow \qquad I \cong a^2/4$ $\qquad$ ***Poisson folt***

Poisson folt



(Világos folt egy /kis/ korong mögötti árnyék közepén).

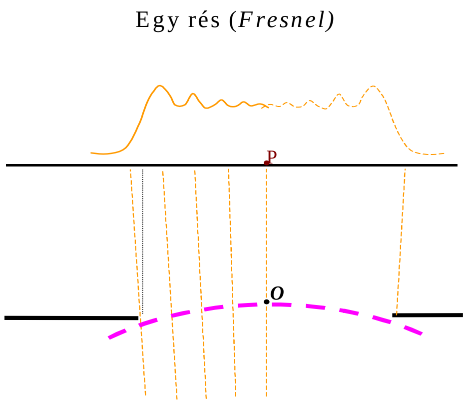
δ) Ha letakarunk minden második zónát (amelyek kioltanak):

$$A = a + aq^2 + aq^4 + \ldots + aq^{2n} = a\,(1 + q^2 + q^4 + \ldots) \cong n\,a$$

$$A \cong na\,; \qquad \Rightarrow \qquad I \cong n^2\,a^2 \qquad (n \to \infty!)$$

Fresnel lencse (zóna lencse)
(infravörös lencse, ultrahang lencse)

ε) Ha csak néhány (központi) zónát engedünk át, a többit kitakarjuk (rés /korong alakú/)



a) n = 5 (páratlan)

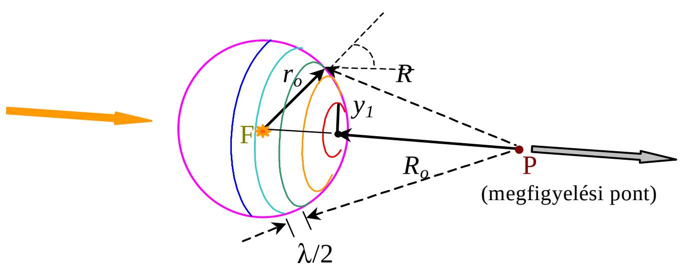
$$A = a - aq + aq^2 - aq^3 + aq^4 = a\,(1 - q + q^2 - q^3 + q^4) =$$
$$= a\,(1 + q^5)/(1+q)$$
$$\Rightarrow \qquad A \cong a\,; \qquad \Rightarrow \qquad I \cong a^2$$

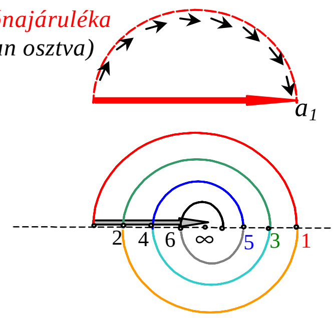
b) n = 4 (páros)

$$A = a - aq + aq^2 - aq^3 = a\,(1 - q + q^2 - q^3) =$$
$$= a\,(1 - q^4)/(1+q)$$
$$\Rightarrow \qquad A \ll a\,; \qquad \Rightarrow \qquad I \ll a^2\ (\approx 0)$$

Az fényintenzitás a rés méretétől függően oszcillál a P pontban.

Az egyes zónák járulékait még pontosabban számolva:





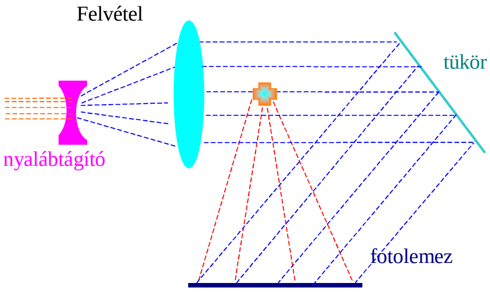
zónasugár (y_n): $1/r_o + 1/R_o = n\,\lambda/y_n^2$

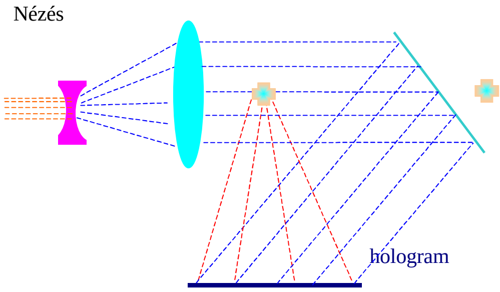
n=2 $\quad y_2 = \sqrt{\lambda\,f}$ $\quad$ ($1/r_o + 1/R_o = 2/f$ *jelöléssel*)

$A_\infty (= a_1/2)$
$I \sim a^2/4$
Poisson folt

Hologram

Koherens fényforrás





Ahol erősítés volt ott jön át a fény.
Két kép lesz.