ELTE I.Fizikus 2004/2005 II.félév

KISÉRLETI FIZIKA

Elektrodinamika

12. (V.3.)

Interferencia I.

$\Psi(r,t) = \Phi(r,t)e^{i\omega t} = A(r)\, e^{ikL(r)}\, e^{i\omega t}$ hullámfüggvény (E, B, $\underline{E}$, $\underline{B}$,...)

$$\boxed{\Delta\Psi - 1/v^2\, \partial^2\Psi/\partial t^2 = 0}$$

$\omega^2/v^2 = k^2$; $\omega^2/c^2 = k_o^2$; $v = c/n$; $k = n\,k_o = n\,2\pi/\lambda_o$; $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$

Síkhullámra: $\underline{E}\,(\omega t - \underline{k}\,\underline{x})$, ... *(ahol $\phi = (\omega t - \underline{k}\,\underline{x})$)*

$\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\,{}^{\partial}/_{\partial t}\,(\underline{B}) \quad \Rightarrow -\underline{k} \times \underline{E} = -\omega\underline{B} \Rightarrow \underline{B} = (1/v)\,\underline{e} \times \underline{E}$

$\mathrm{rot}\,\underline{H} = {}^{\partial}/_{\partial t}\,(\underline{D}) \quad \Rightarrow -\underline{k} \times \underline{H} = \omega\underline{D} \Rightarrow \underline{H} = v\,\underline{e} \times \underline{D}$

$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} = w\,(v\,\underline{e}) = w\,(c/n)\,\underline{e} \qquad w = ½\,\underline{E}\,\underline{D} + ½\,\underline{H}\,\underline{B}$

$w_{el} = ½\underline{E}\,\underline{D} = ½\underline{H}\,\underline{B} = w_{mágn.}$

I intenzitás

$$I = \langle S\rangle = \underbrace{\langle (E\cos\phi)\,(H\cos\phi)\rangle}_{\text{idő átlag}} = EH\,(1/T)\int \cos^2(\omega t)dt = ½\,S_{max}$$

Speciális síkhullámra *(x polarizált és előre (+z) terjedő):*

$\underline{E} = (E_x, 0, 0)$.. ; $\underline{H} = (0, H_y, 0)$..

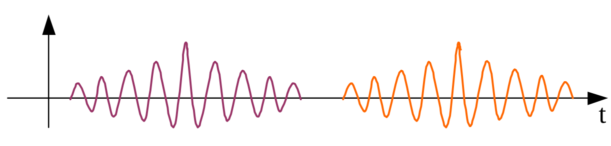
$$E_x = f(x - vt)\ ;\ H_y = +\sqrt{\mu/\varepsilon}\, f(x - vt)\ ;\ S_z = +\sqrt{\mu/\varepsilon}\, f^2(x - vt)$$

$S \sim f^2$; (négyzetes világ) (a megfigyelt világ) !

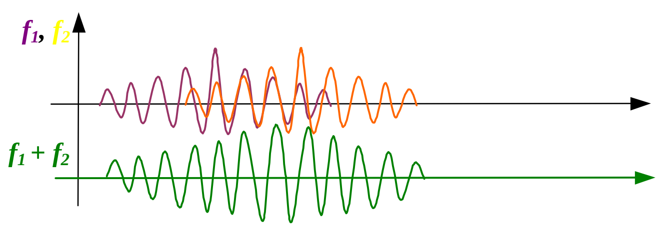
$f = f_1 + f_2$ (szuperpozició elve) (a mezők világa)!

$$S = f^2 = \underbrace{f_1^2}_{I_1} + \underbrace{f_2^2}_{I_2} + \underbrace{2\,f_1 f_2}$$

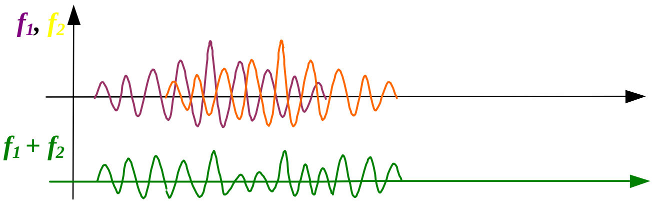
1. *intenzitás* 2. *intenzitás* ***INTERFERENCIA***



Ha f_1 és f_2 időben elválik:



Ha f_1 és f_2 átlapol:
(konstruktívan, erősítés)



Ha f_1 és f_2 átlapol:

(destruktívan, kioltás)

$$f_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)\,;\ \ f_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \qquad \text{(z = 0 -ban)}$$

$$(f_1 + f_2)^2 = A_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + \\ + 2A_1 A_2 \cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\cos^2(\omega t + \varphi_1) = \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_1)}{2}$$

$$\cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$(f_1 + f_2)^2 = \frac{A_1^2}{2}[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_1)] + \frac{A_2^2}{2}[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_2)] + \\ + A_1 A_2 [\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Időbeli átlagoláskor:

$$\overline{(f_1 + f_2)^2} = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + A_1 A_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

*(1/**T**) ∫cos(**2ω** t)dt = 0*

$$\overline{(f_1 + f_2)^2} = \frac{1}{2}\left\{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\Delta\varphi\right\}$$

$$\boldsymbol{I_e = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}_{\Uparrow}} \qquad \boldsymbol{(I_i = A_i^2/2)}$$

az interferencia tag

1. $\boldsymbol{\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi}$ *($\Delta\varphi = 2k\pi$) – azonos fázis*

$$\boldsymbol{I_e = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}} = \frac{1}{2}\left\{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2\right\} = \frac{1}{2}\{A_1 + A_2\}^2$$

2. $\boldsymbol{\varphi_1 = \varphi_2 + (2k+1)\pi}$ *($\Delta\varphi = (2k+1)\pi$) – ellentétes fázis*

$$\boldsymbol{I_e = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}} = \frac{1}{2}\left\{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2\right\} = \frac{1}{2}\{A_1 - A_2\}^2$$

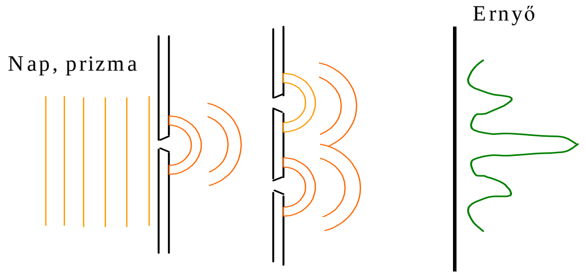
3. *$\Delta\varphi$ = tetszőleges – véletlen fázis . (A fázisok időátlaga és annak cosinusa = 0)*

$$\overline{\cos\Delta\varphi} = 0$$

$$\boldsymbol{I_e = I_1 + I_2} = \frac{1}{2}\left\{A_1^2 + A_2^2\right\}$$ (Az intenzitások ilyenkor szuperponálódnak!)

Interferencia kisérletek:

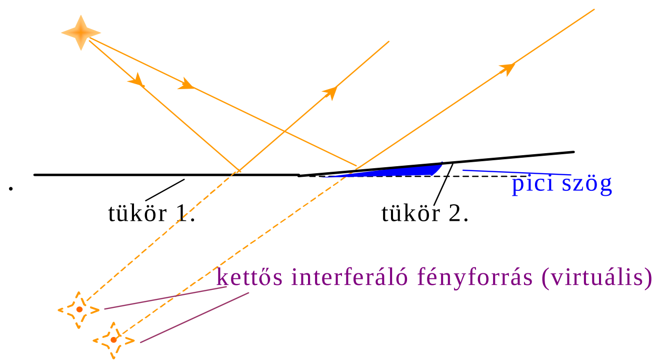
1.) Kettős rés (Young 1802)



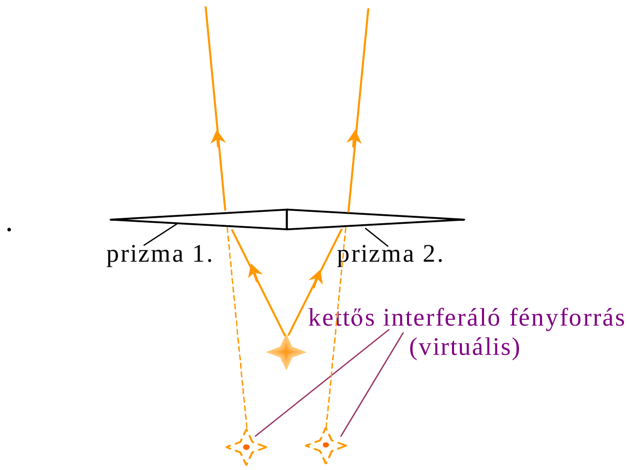
Két pontszerű fényforrás interferenciája

Valójában: három "rés", lyuk /tű/
nem síkhullám, hanem gömbhullám)

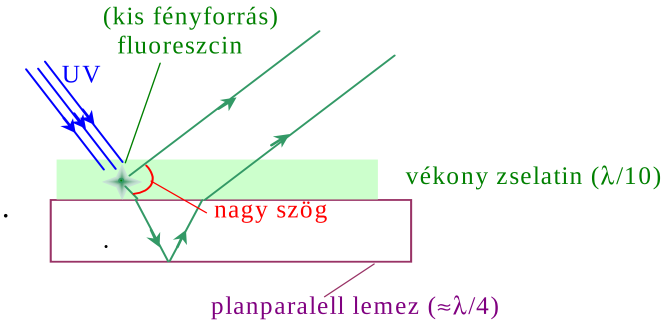
2.) Kettős tükör (Fresnel 1816)



3.) Kettős prizma (Fresnel)



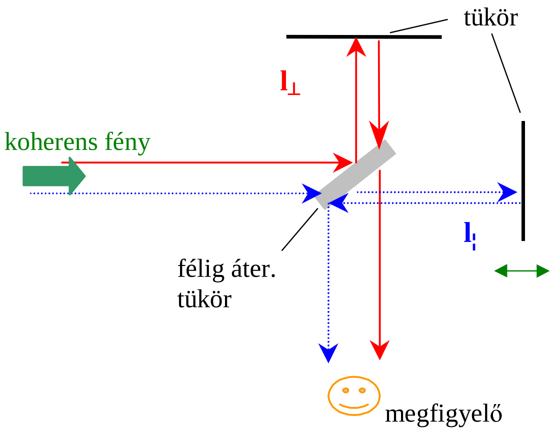
4.) *Selényi Pál nagyszögű interferencia kisérlete*



A gerjesztő (UV) fény az apró fluoreszcin molekulát zöld fény sugárzására kényszeríti, így van egy nagyon kisméretű (< λ/10) zöld fényforrás, amelyből nagy szögben kilépő fénysugarak interferálnak.

Fényelmélet (foton)
Részecske-hullám dualizmus.

5.) *Michelson interferométer*



$$A_e = A_1\left(e^{\,i(2\pi/\lambda o)l_\perp} + e^{\,i(2\pi/\lambda o)\,l_\parallel}\right)$$
$$I_e \sim I_o\,(1 + \cos\{(2\pi/\lambda o)\,(l_\perp - l_\parallel)\})$$

Interferencia gyűrűk (☺) .

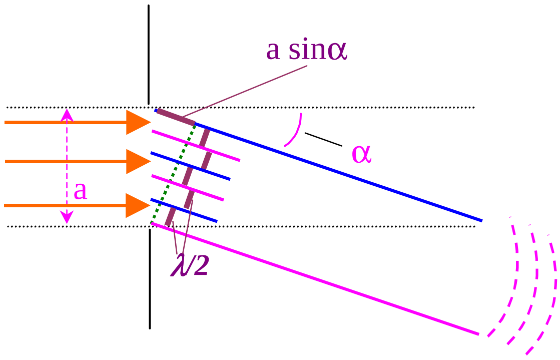
(l = 4 m hosszú karok
Forgatható: (márványtömb úszik Hg -on))

Relativitáselmélet.

Más hullámoknál is van interferencia:

- Hang, víz, ..
- Elektromágneses hullám:
  - rádió, mikrohullám
  - infravörös
  - fény
  - UV, röntgen
- elektron
- neutron

Elhajlás egy résen

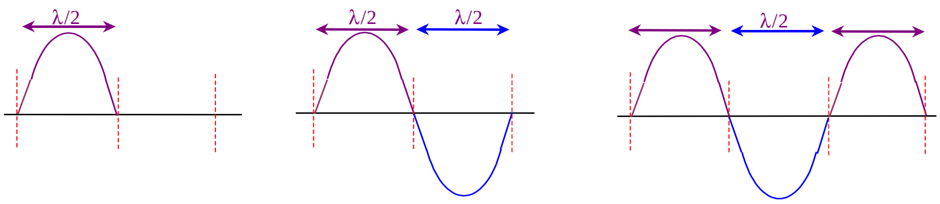


*A teljes rés a **λ/2** szélességű zónák járulékainak az interferenciája.*

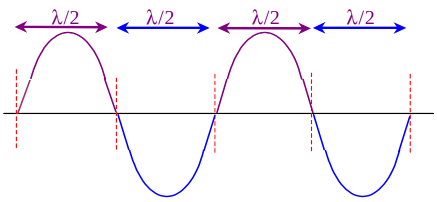
1 zóna** (erősítés)* ***a sinα = λ/2

2 zóna** (kioltás)* ***a sinα = λ

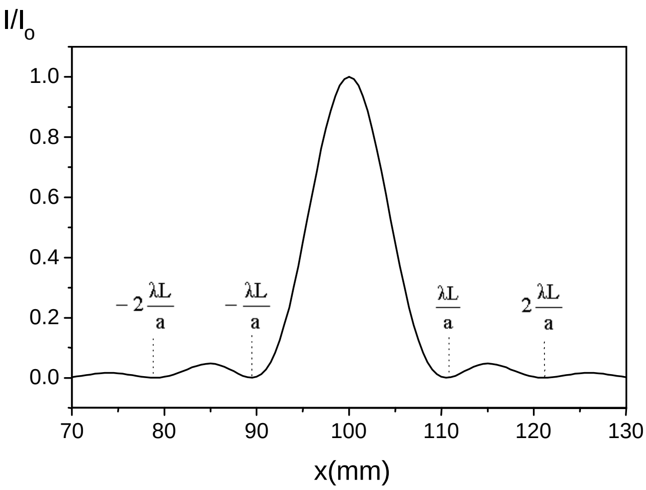
3 zóna** (erősítés)* ***a sinα = 3 λ/2



***4 zóna** (kioltás)*
a sinα = 2λ



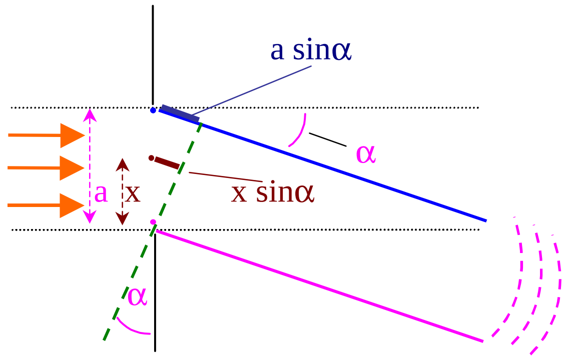
Pontosabban:



egy rés

$$I_o \frac{\sin^2\{(\pi a \sin\alpha/\lambda_o)\}}{(\pi a \sin\alpha/\lambda_o)^2}$$

A Fraunhoffer tárgyalás

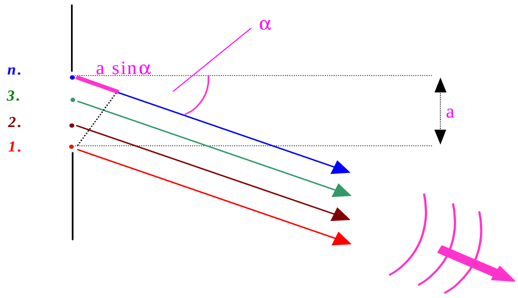


A rés egy közbenső • pontjában a φ fáziseltolódás *arányosan* számítandó:

$$\varphi = (2\pi/\lambda_o)\ x \sin\alpha$$

$$\varphi_{max} = (2\pi/\lambda_o)\ a \sin\alpha$$

(A folytonos geometria helyett n db /diszkrét/ tartományra osztjuk a rést.)



A rés tehát ***n*** darab (nagyon sok) kis fényforrásként sugároz.

$$x_j = j\ a/\ n$$

$$\varphi_j = (2\pi/\lambda_o)(j\ a/\ n) \sin\alpha$$

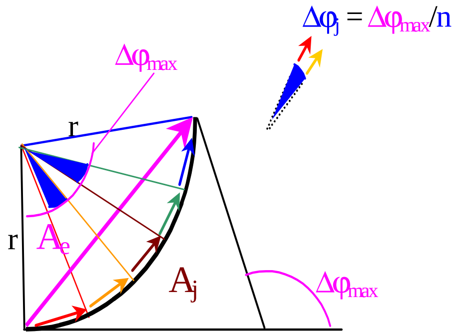
$$A_e = \sum_{j=1}^{j=n} A_j \sin\varphi_j$$

$$a = \sum_{j=1}^{j=n} A_j = A_j\, n \quad (= A_o)$$

$$(A_j = a/\ n)$$

tehát

$$A_e = \sum_{j=1}^{j=n} (a/\ n) \sin\varphi_j$$



$$A_e = 2\ r \sin(\Delta\varphi_{max}/2)$$

ahol

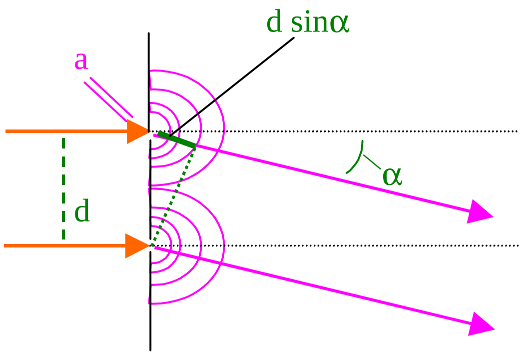
$$2r \sin(\Delta\varphi_j/2) = A_j = a/\ n$$

$$A_e = \frac{a}{n}\frac{\sin(\Delta\varphi_{\max}/2)}{\sin(\Delta\varphi_j/2)} = \frac{a}{n}\frac{\sin(\Delta\varphi_{\max}/2)}{\sin(\Delta\varphi_{\max}/2n)}$$

n→∞ esetén : $A_e = a\dfrac{\sin(\Delta\varphi_{\max}/2)}{\Delta\varphi_{\max}/2n} = A_o \dfrac{\sin(\frac{\pi}{\lambda_o} a \sin\alpha)}{\frac{\pi}{\lambda_o} a \sin\alpha}$

$$I_e = I_o \frac{\sin^2(\frac{\pi}{\lambda_o} a \sin\alpha)}{\left(\frac{\pi}{\lambda_o} a \sin\alpha\right)^2}$$

Kettős rés
Fraunhoffer tárgyalása

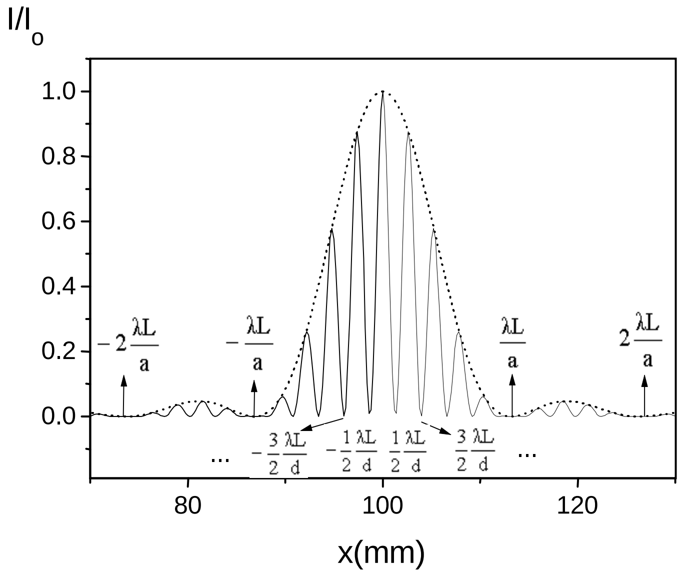


$$A_e = \sum_{j=1}^{j=2} A_j \sin \varphi_j$$

$$A_e = A_1 + A_1 \sin\delta$$
$$\delta = (2\pi/\lambda_o)\ \Delta ns$$
$$(\Delta ns = d \sin\alpha)$$
$$I_e = I_1\ 4 \cos^2(\pi d \sin\alpha/\lambda_o)$$

(Az eredő: két rés fázishelyes összege).

Ahol : $I_1 = I_{1rés} = I_o * \dfrac{\sin^2(\pi a \sin\alpha/\lambda)}{(\pi a \sin\alpha/\lambda)^2}$ ***az egy rés intenzitása*** (is irányfüggő).



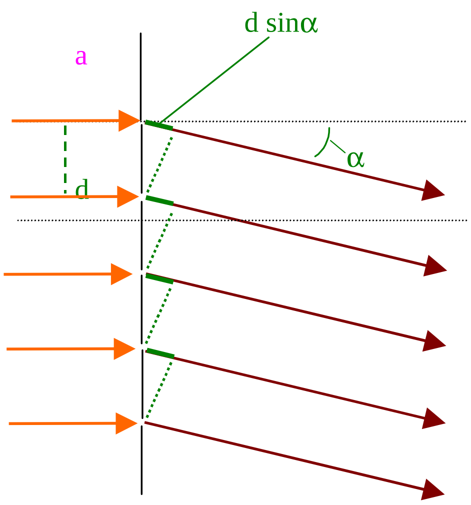
két rés

N = 2

d/a = 4

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I}_0} = \left(\frac{\sin \mathbf{N x}}{\sin \mathbf{x}}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\mathbf{x}}{4}}{\frac{\mathbf{x}}{4}}\right)^2$$

Sok rés (N), azaz rács.



$$A_e = \sum_{j=1}^{j=N} A_j \sin \varphi_j$$

$$A_e = A_1 \left(1 + \sum_{m=1}^{m=N-1} \sin m\delta\right)$$

$$\delta = (2\pi/\lambda_o)\ \Delta ns$$

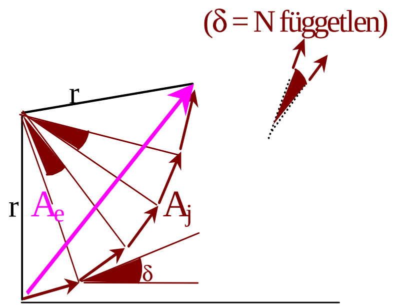
$$(\Delta ns = d \sin\alpha)$$

$$\delta = 2\pi d \sin\alpha/\lambda_o$$

$$2r \sin(\delta/2) = A_j = A_1$$

$$A_e = 2r \sin(N\delta/2)$$

$$A_e = A_1 \frac{\sin(N\delta/2)}{\delta/2} = A_1 \frac{\sin\left(N\frac{\pi}{\lambda_o} d \sin\alpha\right)}{\frac{\pi}{\lambda_o} d \sin\alpha}$$



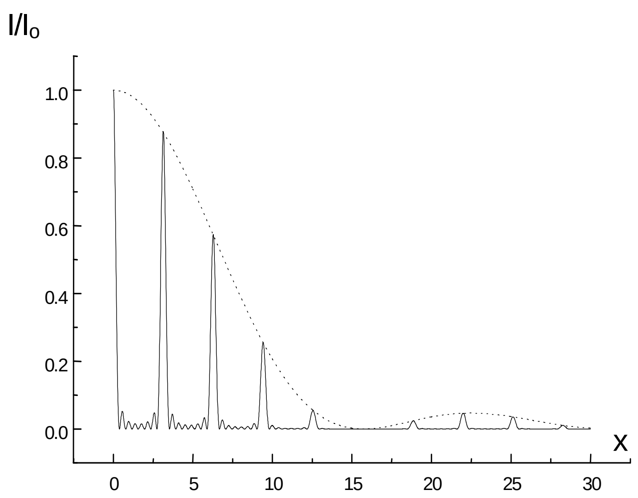
$$I_e = I_1 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{(\delta/2)^2}$$

$$I_e = I_1 \frac{\sin^2\{N(\pi d \sin\alpha/\lambda_o)\}}{(\pi d \sin\alpha/\lambda_o)^2}$$

Összetett esetben

(rácsállandó /réstávolság/: d, rések száma: N, résméret: a)

$$I_e = I_o \frac{\sin^2(\pi a \sin\alpha/\lambda)}{(\pi a \sin\alpha/\lambda)^2} \frac{\sin^2\{N(\pi d \sin\alpha/\lambda_o)\}}{(\pi d \sin\alpha/\lambda_o)^2}$$



nyolc rés (rács)

N = 8

d/a = 5

$$\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I}_0} = \left(\frac{\sin \mathbf{Nx}}{\sin \mathbf{x}}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\mathbf{x}}{5}}{\frac{\mathbf{x}}{5}}\right)^2$$

x = π d sinα /λ