ELTE I.Fizikus 2004/2005 II.félév

KISÉRLETI FIZIKA

Elektrodinamika

11. (IV.29 -V.3.)

Geometriai optika, eikonál

$$\Delta\Psi - \frac{n^2(\underline{r})}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

Mi ennek a megoldása? Kicsiben hullámok, melyekből kell összerakni az egész teret.

Vákuumban

$n = 1$; $\omega = c\, k_o$;

$$\underline{k}_o = \frac{2\pi}{\lambda_o}\underline{e}$$

$$\Psi = e^{i(\omega t - \underline{k}_o \underline{r})}$$

Anyagban:

$n \neq 1$; $\omega = (c/n)\, k = v\, k$

A fény sebessége anyagban.

$$\underline{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\underline{e} \;; \quad \text{ahol } \underline{k} = n\underline{k}_o$$

erre megy a hullám

$$\Psi = e^{i(\omega t - \underline{k}\,\underline{r})} = e^{i\omega t}\Phi$$

$$\Phi = e^{-i\underline{k}\,\underline{r}}$$

(Az időfüggő rész, azaz a frekvencia mindig ugyanaz!)

A térfüggésre

(inhomogén anyagban, $k(\underline{r})$)

$$\Psi = e^{i\omega t}\Phi(r)$$

$$\Delta\Phi + \frac{n^2}{c^2}\Phi = 0 \;; \quad \Delta\Phi + k^2\Phi = 0$$

$$\Delta\Phi + (nk_o)^2\Phi = 0 \;; \Rightarrow \quad \Phi = e^{-ik_o L(\underline{r})}$$

(k_o anyag független; minden anyag és irányfüggés az $L(\underline{\mathbf{r}})$ -ben van benne!)

$L(\underline{\mathbf{r}})$ az ***eikonál*** függvény.

Az eikonál tulajdonságai***:***

1. $L(\underline{\mathbf{r}})$ = állandó   állandó fázisú felület

2. Hogyan haladnak az állandó fázisú felületek:

$$\Psi(\underline{r},t) = \Psi(\underline{r}+\delta\underline{r}, t+\delta t) = \Psi(\underline{r},t) + \frac{\partial\Psi}{\partial\underline{r}}\delta\underline{r} + \frac{\partial\Psi}{\partial t}\delta\underline{t}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{r}}\delta\underline{r} + \frac{\partial\Psi}{\partial t}\delta\underline{t} = 0$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\underline{r}} = e^{i\omega t}\frac{\partial\Phi}{\partial\underline{r}} = e^{i\omega t}(-ik_o\, grad\, L)\Phi \;; \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t} = i\omega e^{i\omega t}\Phi$$

$$(-ik_o\, grad\, L)\underline{\mathrm{v}} + i\omega = 0 \text{, ahol } \mathrm{v} = \frac{\delta\underline{r}}{\delta t} \text{ hullámsebesség}$$

$$(\,grad\ L\,)\underline{v}=\omega/k_o=c=n\,v$$

$$(\,grad\ L\,)\underline{e}\ =n$$

3. Az eikonálra felírt egyenlet:

$$\Delta\Phi+k^2\,\Phi=0\,;\qquad grad\,\Phi=-i\,k_o(\,grad\ L\,)\Phi\,;$$

$$\Delta\Phi=-i\,k_o\ (\,\Delta L\,)\Phi-k_o^2(\,grad\ L\,)^2\,\Phi$$

$$-i\,k_o\ (\,\Delta L\,)-k_o^2(\,grad\ L\,)^2+k^2=0\,;\ \ i\,k_o\ (\,\Delta L\,)+\left[k_o^2(\,grad\ L\,)^2-n^2k_o^2\right]=0$$

$$i/k_o\ (\,\Delta L\,)+\left[(\,grad\ L\,)^2-n^2\right]=0$$

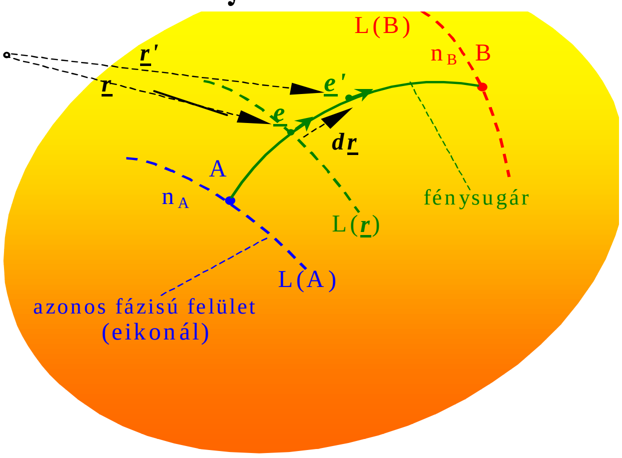
Geometriai optika: $\boldsymbol{\lambda_o\to 0}$; azaz $\boldsymbol{k_o\to\infty}$ közelítésben az első tag eltűnik:

$$\left[(\,grad\ L\,)^2-n^2\right]=0$$

4.
$$(\,grad\ L\,)=n\,\underline{e}$$

$$rot(\,n\,\underline{e}\,)=0\qquad\oint n\,\underline{e}\,d\,\underline{s}=0$$

Fermat elv: $\int n\,ds=min.$



$$L(\,B\,)-L(\,A\,)=\int_A^B grad\ L(\,\underline{r}\,)\,d\,\underline{r}=$$

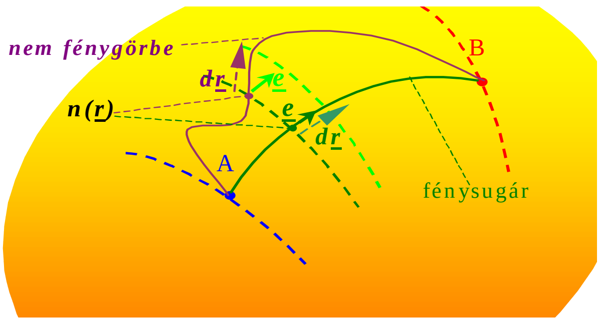
$$=\int_A^B n\,\underline{e}\,d\,\underline{r}=\int_A^B n\,dr$$

(csak ha a fénysugár mentén haladunk***)***

(U.i. ott $\ \underline{\boldsymbol{e}}\ \|\ \boldsymbol{d}\,\underline{\boldsymbol{r}}$)

$$\int_A^B n\,\underline{e}\,d\,\underline{r}=\int_A^B n\,dr=c\int_A^B\frac{dr}{v}=c\int_A^B dt=$$

$$=c\{t(\,B\,)-t(\,A\,)\}$$



$$\underbrace{\int_A^B n\,dr}_{a\ fényútra}\ =\ \underbrace{\int_A^B n\,\underline{e}\,d\,\underline{r}}_{a\ fényútra}\ =\ \underbrace{\int_A^B n\,\underline{e}\,d\,\underline{r}}_{a\,nem\ fényútra}\ \le$$

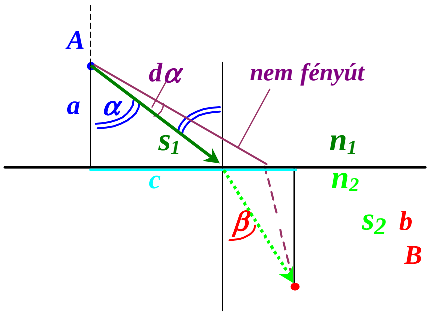
$$\le\ \underbrace{\int_A^B n\ dr}_{a\,nem\ fényútra}$$

Ha nem a fénysugár mentén haladunk: $\underline{\boldsymbol{e}}\ \not\|\ \boldsymbol{d}\,\underline{\boldsymbol{r}}$ így $\ \underline{e}\,d\,\underline{r}\le dr$

Hiszen $\oint n\,\underline{e}\,d\,\underline{s}=0\Rightarrow\ \underbrace{\int_A^B n\,\underline{e}\,d\,\underline{r}}_{a\ fényútra}+\underbrace{\int_B^A n\,\underline{e}\,d\,\underline{r}}_{a\,nem\ fényútra}=0\ \Rightarrow\ \underbrace{\int_A^B n\,\underline{e}\,d\,\underline{r}}_{a\ fényútra}=\underbrace{\int_A^B n\,\underline{e}\,d\,\underline{r}}_{a\,nem\ fényútra}$

Igazoltuk tehát, hogy a fényútvonalra minden más útvonalnál kisebb az optikai úthossz: $\int n\,ds=min.$, vagyis ekkor a ***legrövidebb a terjedési idő***: $\int dt=min.$

a) A Fermat elv alkalmazása:
(Hogy megy a fény két közeg határán?)



$$s^{\text{optikai út}} = \int n\,ds = n_1 s_1 + n_2 s_2 =$$
$$= \frac{n_1 a}{\cos\alpha} + \frac{n_2 b}{\cos\beta}$$

Mellékfeltétel: Az ***A*** és ***B*** távolsága adott:

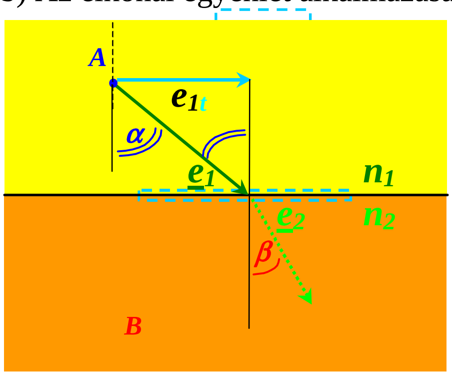
$a + b =$ állandó, és $c =$ állandó.
$$c = a\,tg\,\alpha + b\,tg\,\beta$$

A Fermat elv szerint $s^{\text{optikai út}}$ minimális: A mellékfeltétel szerint α - β összefügg:

$$\frac{\partial s^{opt.}}{\partial\alpha} = 0 = \frac{n_1 a}{\cos^2\alpha}\sin\alpha + \frac{n_2 b}{\cos^2\beta}\sin\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right) \;;\quad \frac{\partial c}{\partial\alpha} = 0 = \frac{a}{\cos^2\alpha} + \frac{b}{\cos^2\beta}\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)$$

$$0 = \frac{n_1 a}{\cos^2\alpha}\sin\alpha - \frac{n_2 a}{\cos^2\alpha}\sin\beta \Rightarrow \quad n_1\sin\alpha - n_2\sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_2/n_1$$

b) Az eikonál egyenlet alkalmazása:



$$\boldsymbol{rot\; n\underline{e} = 0} \Rightarrow \oint n\,\underline{e}\,d\,\underline{s} = 0$$

A közeghatárt körülölelő hurokra kiszámítva az integrált (az irányvektorok *t*angenciális komponensei jelennek meg):

$$\boldsymbol{n_1 e_{1t} = n_2 e_{2t}}$$
$$\boldsymbol{n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta}$$