ELTE I.Fizikus 2004/2005 II.félév

KISÉRLETI FIZIKA
Elektrodinamika
10. (IV.26-29.)

A Maxwell egyenletek átírása potenciálokra:

$div\,\underline{B}=0 \Rightarrow\ \underline{B}=rot\,\underline{A}$; de $rot\,\underline{E}\neq 0\ !$? $\Rightarrow\ \underline{E}=-grad\,U$ már nem megfelelő.

$$rot\,\underline{E}=-\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \qquad \Rightarrow rot\,\underline{E}=-\frac{\partial\, rot\,\underline{A}}{\partial t}$$

$$rot\,\underline{E}+\frac{\partial\, rot\,\underline{A}}{\partial t}=rot\left(\underline{E}+\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right)=0$$

$$\left(\underline{E}+\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right)=-\,grad\,U$$

$$\underline{E}=-\,grad\,U-\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

$$\underline{D}=\varepsilon\,\underline{E};\underline{B}=\mu\,\underline{H}\ ;\ div\,\underline{E}=\rho/\varepsilon$$

$$\boxed{\Delta U+\frac{\partial\, div\,\underline{A}}{\partial t}=-\rho/\varepsilon}$$

$$rot\left(\underline{B}/\mu\right)=\underline{j}+\varepsilon\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}; \qquad 1/\mu\ rot\,rot\,\underline{A}=\underline{j}+\varepsilon\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$1/\mu\ (grad\,div-\Delta)\underline{A}=\underline{j}-\varepsilon\left(grad\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}\right)$$

$$\boxed{\Delta\underline{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}-grad\left(div\,A+\varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial t}\right)=-\mu\,\underline{j}}$$

Csúnya, de egy feltételt lehet kikötni $\underline{A}$-ra.

Lorentz feltétel: $$\left(div\,\underline{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial t}\right)=0$$

$$\Delta U-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-\rho/\varepsilon \quad \text{és} \quad \Delta\underline{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}=-\mu\,\underline{j}$$

$$\left(div\,\underline{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right)=0$$

$$\Delta U-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-\rho/\varepsilon \quad \text{és} \quad \Delta\underline{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2}=-\mu\,\underline{j}$$

Szép szabályos egyenletek: $\mathbf{U}=-\rho/\varepsilon$ és $\underline{\mathbf{A}}=-\mu\,\underline{j}$

ahol a D'Alambert operátor.

Vegyük a $\boldsymbol{U}$ egyenlet ε szorosát és $\frac{\partial}{\partial t}$ -t;

valamint a $\underline{\boldsymbol{A}}$ egyenlet μ-szörösét és div -t

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon\mu}divA\right)= \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\underline{j}\right)$$

= 0 = 0

(Lorentz felt. Kontinuitási egyenlet)

Ellenőrizzük, hogy a homogén egyenlet teljesíti e a a Lorentz feltételt!

$$U=U_o\,e^{i(\omega t-\underline{k}\,\underline{r})};\ \underline{A}=\underline{A}_o\,e^{i(\omega t-\underline{k}\,\underline{r})};$$

A Lorentz feltétel: $div\,\underline{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial U}{\partial t}=-i\,\underline{k}\,\underline{A}_o+\varepsilon\mu(i\omega)U_o=0\Rightarrow$

$\underline{k}\,\underline{A}_o={}^{\omega}\!/_{c^2}\,U_o$ és $c\,k=\omega$ ill. [ε μ c^2 = 1]

$\underline{B}_o=-i(\underline{k}\times\underline{A}_o)$; $\underline{E}_o=i\,\underline{k}\,U_o-i\omega\,\underline{A}_o$;

$\underline{k}\,\underline{B}_o=0$ és $\underline{k}\,\underline{E}_o=i\left\{k^2U_o-\omega\left(\underline{k}\,\underline{A}_o\right)\right\}=i\left\{k^2U_o-\omega\left({}^{\omega}\!/_{c^2}\,U_o\right)\right\}=0$ ($\underline{E}$, $\underline{B}$ transzverzális)

A Laplace–Poisson és a D'Alambert egyenlet megoldásainak összehasonlítása:

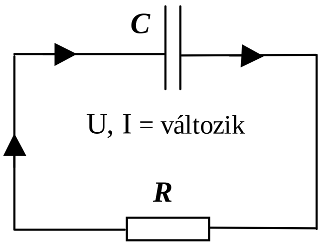
$$\Delta U=-{}^{\rho}\!/_{\varepsilon}\,; \qquad U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\rho(r')dr'^3}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$U=-{}^{\rho}\!/_{\varepsilon}\,; \qquad U(r,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\rho\left(r',t-{}^{|r-r'|}\!/_{c}\right)dr'^3}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Az elektromágneses tér energiaviszonyai:

RC kör:

A kondenzátor kisütéskor



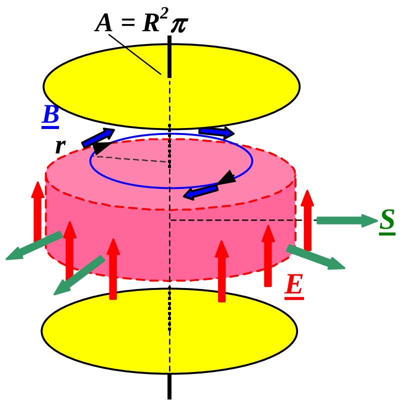
$$U_1 = \frac{Q}{C}\ ;\ U_2 = I\,R\ ;\ U_1 + U_2 = 0$$

$$\frac{Q}{C} + I\,R = 0\,;\ I = \frac{dQ}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q$$

$$Q = Q_o\,e^{-t/RC} = C\,U_o\,e^{-t/RC}\,;\Rightarrow U = U_o\,e^{-t/RC}$$

A töltésben energia volt, ami átment az ellenállásra.

A kondenzátor (Hol áramlik az energia?)



$$E = U(t)/d\ ;\quad \iint \underline{E}\,d\,\underline{f} = E\,A = \sigma A/\varepsilon_o\ ;\quad \sigma = \varepsilon_o\,E$$

$$\oint \underline{H}\,d\,\underline{s} = I + \frac{d(\iint \underline{D}\,d\,\underline{f}\,)}{dt}\,;\quad H\,(2\pi\,r) = \varepsilon_o\,\frac{dE}{dt}\left(r^2\pi\right)$$

$$H\,(2\pi\,r) = \varepsilon_o\,\frac{dE}{dt}\left(r^2\pi\right);\quad H = \varepsilon_o\,\frac{r}{2}\,\frac{dE}{dt}$$

Kezdetben:

$$E_{energia} = \frac{1}{2}\varepsilon_o\,E^2 V = \frac{1}{2}\varepsilon_o\,E^2\left[(R^2\pi)d\right]$$

$$\frac{dE_{energia}}{dt} = \varepsilon_o\,E\,\frac{dE}{dt}V = E\left\{H\,\frac{2}{R}\right\}\left[(R^2\pi)d\right];$$

$$\frac{dE_{energia}}{dt} = EH\left\langle(2\pi\,R)d\right\rangle = E\ H\ (a\ palást\ felszíne)$$

Poynting vektor $\underline{S}$ ≡ az ***energiaáramlás*** vektor:

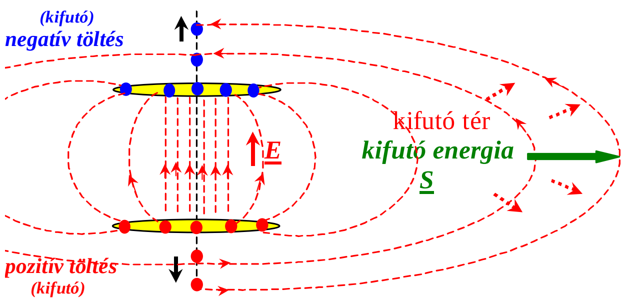
$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$$

$$[\underline{S}] = [\ \frac{J}{s\,m^2}\ ]$$

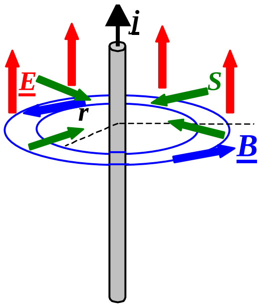
Az energia a kondenzátor palástján áramlik ki!

A fegyverzetekről kiáramló töltések (ellentétesen áramlanak, de töltések eltérő előjele miatt az áramirány azonos) töltéspárt alkotva, magukkal viszik ki a fegyverzetek közül az erőteret jelző erővonalakat, de oldalirányban.

A mező és a hozzátartozó energia áramlik ki a paláston.



b) Az ellenállás
(A kondenzátorból kijövő energia hogyan halad tovább?)



Az energia nem a drót mentén megy, hanem a paláston áramlik be a vezetékbe (és hő fejlődik).

Hogyan lehet általánosan belátni?

Kontinuitási egyenlet:

Az N mennyiség (egy adott térfogatban) az I áram és az S forrás miatt változik az időben:
Integrálisan: $\frac{dN}{dt}+I=S$; ill. differenciálisan (térfogategységekre vonatkozóan, azaz) a sűrűségekkel kifejezve:ρ- az N sűrűsége = N/V; j = az I áram /felületi/sűrűsége = I/A; s az S sűrűsége = S/V forrássűrűség, azaz $N=\int \rho dV$; $I=\int \underline{j}\, d\underline{A}$; $S=\int s dV$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div\, \underline{j}=s$$; N legyen most az energia!

(ρ_E - az energiasűrűség; $\underline{j}_E$ - az energiaáram sűrűség; s_E az energia-forrássűrűség)

$$\rho_E = w = \tfrac{1}{2}\,(\underline{\boldsymbol{E}}\,\underline{\boldsymbol{D}} + \underline{\boldsymbol{H}}\,\underline{\boldsymbol{B}})\ ;$$ és (ezt akarjuk belátni)

$$\underline{j}_E = \underline{\boldsymbol{S}} = \underline{\boldsymbol{E}} \times \underline{\boldsymbol{H}}$$

A munkavégzéskor az energiaforrásról (s_E) mit tudunk ?

Az időegységre vonatkoztatott munka a teljesítmény (P), annak térfogategységre vonatkoztatott része a teljesítménysűrűség: p = P/V = (W/V)/t = w/t = $\underline{\boldsymbol{f}}\,\underline{\boldsymbol{v}} = -\rho\,\underline{\boldsymbol{E}}\,\underline{\boldsymbol{v}} = -\underline{\boldsymbol{j}}\,\underline{\boldsymbol{E}}$, tehát $s_E = -\underline{\boldsymbol{j}}\,\underline{\boldsymbol{E}}$
(ahol $\underline{\boldsymbol{f}}$ az erősűrűség = $\underline{\boldsymbol{F}}$ /V)

A tér, a mező energiája fogyhat ($s_E < 0$), mert Joule hővé ($\underline{\boldsymbol{j}}\,\underline{\boldsymbol{E}}$) alakulhat, /ez a forrás negatív, tehát "nyelő", ekkor energiadisszipáció van./.

A $rot\,\underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ -ből kifejezve a $\underline{\boldsymbol{j}}$-t (és késsőbb felhasználva a $rot\,\underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$ -t):

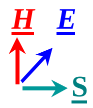
$$-\underline{j}\,\underline{E} = -\underline{E}\,rot\,\underline{H} + \underline{E}\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = [-\underline{E}(\nabla\times\underline{H})] + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial \underline{E}^2}{\partial t} =$$

$$[\nabla(\underline{E}\times\underline{H}) - \underline{H}(\nabla\times\underline{E})] + \frac{1}{2}\frac{\partial(\varepsilon\underline{E}^2)}{\partial t} = [\nabla(\underline{E}\times\underline{H}) - \underline{H}(\nabla\times\underline{E})] + \frac{1}{2}\frac{\partial(\underline{E}\,\underline{D})}{\partial t}$$

$$\left[div(\underline{E}\times\underline{H}) + \underline{H}\left(\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial(\underline{E}\,\underline{D})}{\partial t} = div(\underline{E}\times\underline{H}) + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}(\underline{E}\,\underline{D}+\underline{H}\,\underline{B})\right\}$$

Ez az egyenlet már a kívánt alakú: $s_E = div\,\underline{S} + \frac{\partial w}{\partial t}$

Energiaáramlás hullám esetében.



A fény impulzusa (a fénynyomás) /olyan kicsi, hogy nehéz kimutatni/.

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + div\, \underline{j}_N = s_N$$

N legyen most a $\underline{\mathbf{p}}$ impulzus egyik (j.) komponense:

$$\frac{\partial g_j}{\partial t} + div\, \underline{\underline{\sigma}}_j = s_j = f_j \quad = \quad \frac{\partial g_j}{\partial t} + \partial_i \sigma_{ij} = f_j$$

, ahol

$\underline{g} = \underline{p}$ /V : az impulzussűrűség vektor; σ_{ij} : a Maxwell féle feszültség (tenzor)

$\underline{f} = \underline{F}$ /V : az erősűrűség vektor.

$$\boxed{\underline{f} = \rho\, \underline{E} + (\underline{j} \times \underline{B})} \qquad \boxed{\underline{g} = \underline{D} \times \underline{B}}\ ;$$

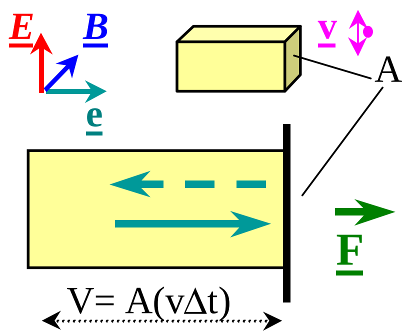
$$\boxed{\underline{g} = \varepsilon\mu\, (\underline{E} \times \underline{H})} \qquad \boxed{\underline{g} = (1/c^2)\, \underline{S}}$$

$$[\underline{g}] = \left[\ \frac{kg\,\frac{m}{s}}{m^3} = \frac{kg}{m^2\, s}\ \right];\ [\underline{S}] = \left[\ \frac{J}{m^2\, s} = \frac{kg\,\frac{m^2}{s^2}}{m^2\, s} = \frac{kg}{m^2\, s}\,\frac{m^2}{s^2}\ \right]$$

A Lebegyev kísérlet (1900) /fénynyomásmérés torziós ingával/

A fénynyomás a transzverzális tér (E) longitudinális effektusa (FL)

$\underline{g} = \underline{S}/c^2$



$\underline{F}_{Lorentz}$ *(kicsi);* $\underline{F}_L = Q\, (\underline{v} \times \underline{B})$

$\underline{v}_{elektron} \parallel \underline{E}$, ***transzverzális ;*** $\underline{F}_L \parallel \underline{S}, \underline{g}$ ***longitud.***

$p_{fénynyom.} = F/A =$

$\Delta\,|\underline{p}_{imp.}|\,/\,(\Delta t\ A) = \Delta\,|\underline{g}\ V|\,/(\Delta t\ A)$

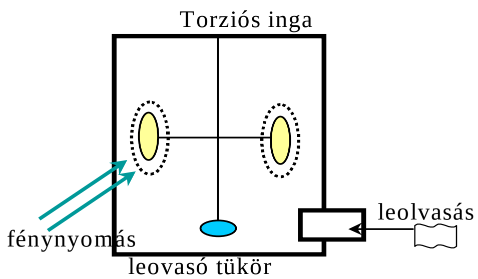
, mivel $V = (\,c\ \Delta t\,)\ A$

/hiszen a tükröt elérő sugarak: h = **c** Δt magasságú;
A keresztmetszetű térfogatban vannak, és az
impulzusváltozás az impulzus kétszerese/

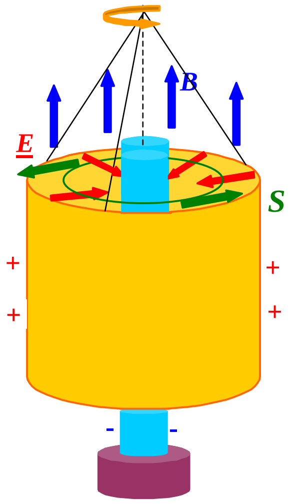
$$\mathbf{p = 2\ |\underline{g}|\ c}$$

$p_{fénynyom.} = 2\, w$	$\underline{g} = \underline{S}/c^2 = w\ \underline{e}\,/c$

Kísérlet (nem /gáztöltésű/ bolométer !)***:***
- *torziós inga* — *kis nyomás (* $p_{Napfény}$ = 4.4 10^{-8} Pa *)*
- *Brown mozgás zavar* — *periodicitás (jelösszegzés, belengetés, rezonancia)*

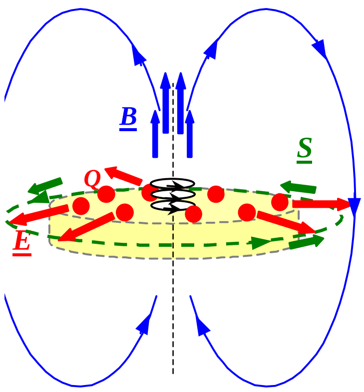


A mező impulzusmomentuma *(impulzusnyomaték)****:***



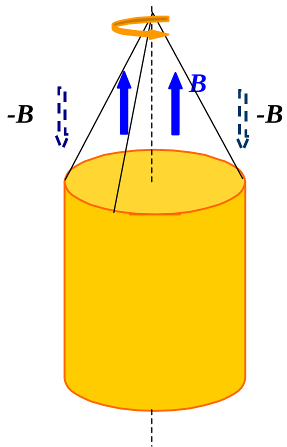
a) Egy hengerkondenzátor belső fegyverzetét -Q, külső fegyverzetét +Q töltéssel feltöltjük (ekkor sugár irányú ***E*** elektromos tér keletkezik). A kondenzátor belső fegyverzete rögzített, külső fegyverzete három fémszálon függve lóg. A kondenzátort tengely irányú (***E*** -re merőleges) ***B*** homogén mágneses térbe helyezzük. Ebben a helyzetben az ***S*** Poyntig vektor körkörösen cirulál a kondenzátor tengelye körül. A fegyverzetek rövidre-zárásakor (a tartó fémszálakon keresztül) az impulzusmomentum megmaradása miatt a külső fegyverzet (a Poynting vektor forgásával egyező irányban) elfordul. A ***g*** impulzus-sűrűséghez ***n*** impolzusmomentum sűrűség is tartozik,amely rövidrezáráskor eltűnik.

$$\boxed{\underline{n} = \underline{N}/V = \underline{r} \times \underline{g}}$$



b) Egy körlap szegélye mentén Q töltésű gömböket helyezünk el forgás-szimmetrikusan, így az Q ***E*** térerősség sugarasan kifelé mutat. A körlap közepén egy (a koronggal egytengelyű) tekercsben I áram folyik, melynek a mágneses tere ***B*** a körlap síkjára merőleges. Az áram megszakításakor a körlap elfordul, mert a megszakítás előtt körkörösen cirkuláló energiához (***S*** Poyntig vektorhoz ill. ***g*** impulzussűrűség vektorhoz) impulzusmomentum tartozik, amely meg kell maradjon.

A sztatikus terekhez <u>is</u> *(körkörösen)* ***<u>áramló</u> energia és áramló impulzus tartozik.***



c) ***Einstein—De Haas kisérlet***

A ferromágneses rúd átmágnesezésekor elfordul.